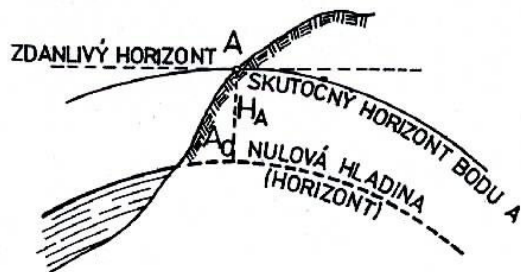


7. VÝŠKOVÉ MERANIE

Pri výškovom meraní určujeme výškové rozdiely (relatívne výšky) medzi dvojicami bodov na zemskom povrchu, z ktorých odvodzujeme absolútne (nadmorské) výšky bodov.



Absolútna výška bodu predstavuje zvislú vzdialenosť bodu od zvolenej základnej porovnávacej plochy. Ako základnú porovnávaciu plochu volíme hladinovú plochu, ktorá prechádza nulovým výškovým bodom. Predstavuje ho stredná hladina najbližšieho mora. Absolútne výšky vyjadrené vo vzťahu k strednej hladine mora nazývame **nadmorské výšky** (obr. 7.1).

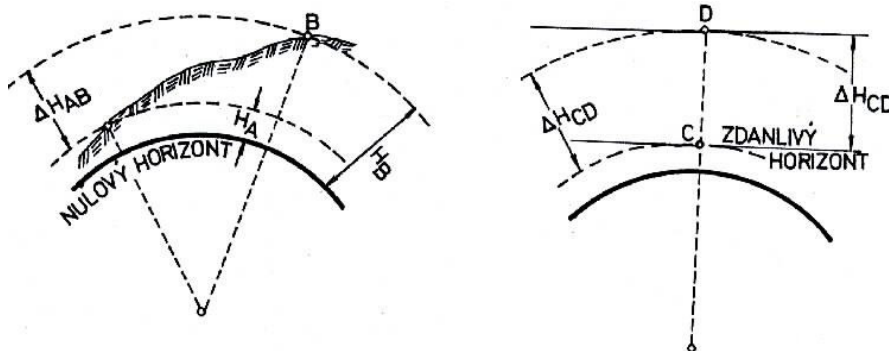
Obr. 7.1. Absolútna (nadmorská) výška bodu

Hladinovú plochu prechádzajúcu nulovou výškou, ktorou fyzikálne vyjadrujeme tvar Zeme, ako sme si uviedli v kap. 1.2, nazývame **geoid**. Pre všetky úlohy nižšej geodézie postačí, ak hladinovú plochu budeme aproximovať guľovou plochou. Sústredná guľová plocha prechádzajúca daným bodom predstavuje skutočný (pravý) horizont. Takáto plocha prechádzajúca nulovým výškovým bodom predstavuje nulový horizont.

Pod **relatívnou** výškou – **výškovým rozdielom** (prevýšením) ΔH_{AB} bodu B vzhľadom k bodu A , rozumieme zvislú odľahlosť horizontu bodu B od bodu A . Vzťahy medzi výškami bodov H_A , H_B a prevýšením ΔH_{AB} vyplývajú z obr. 7.2:

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB}, \quad H_B - H_A = \Delta H_{AB}, \quad H_A = H_B - \Delta H_{AB}. \quad (7.1)$$

Podľa toho, v akej vzájomnej výškovej polohe sú body A a B , máme kladné alebo záporné prevýšenie ΔH_{AB} .



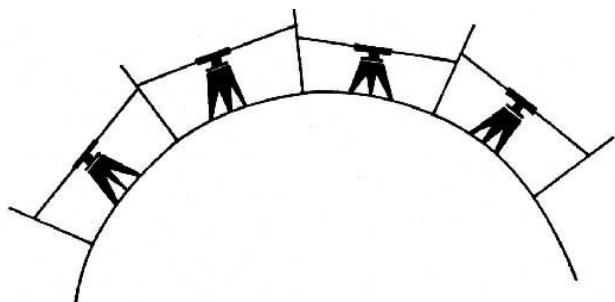
Obr. 7.2. Nadmorské výšky a výškové rozdiely

Skutočné (zakrivené) horizonty nevieme geodetickými prístrojmi vytýčiť. Pri určení prevýšenia potom postupujeme tak, že skutočný horizont zložíme zo zdanlivých horizontov, u ktorých s ohľadom na malú odľahlosť bodov je rozdiel medzi oboma horizontami zanedbateľný (obr. 7.3), alebo k určenému prevýšeniu zavedieme opravu zo zakrivenia Zeme. Výškové rozdiely meriame:

- **trigonometrickou metódou**, ktorú aplikujeme na meranie prevýšenia a výšok na blízke body a na väčšie vzdialenosti, kedy k odmeraným hodnotám prevýšenia priradíme opravu zo zakrivenia Zeme (zo zameny skutočného horizontu za zdanlivý horizont) a opravu z refrakcie,

- **niveláciou**, pri ktorej výškový rozdiel určíme pomocou krátkych vodorovných priamok,

- využitím fyzikálnych vlastností tekutiny – **hydrostatickou niveláciou** a barometrickou metódou z rozdielov tlaku vzduchu a teplôt na jednotlivých meraných bodoch.



V stavebnej praxi sa využívajú všetky metódy okrem barometrického merania výšok, s ktorou sa oboznámime len informatívne. Najväčšie využitie má nivelácia. Nivelácia má najjednoduchšiu technológiu merania, ktorou môžeme dosiahnuť veľmi presné výsledky.

Obr. 7.3. Zloženie skutočného horizontu zo zdanlivých horizontov

7.1 VÝŠKOVÉ BODOVÉ POLE

Výškové bodové pole v SR tvorí Štátna nivelačná sieť (ŠNS).

Na našom území sa začala budovať ešte za Rakúsko-Uhorska v rokoch 1873 až 1918 Vojenským zemepisným ústavom vo Viedni. V rokoch 1918 – 1944 a od r. 1945 podnes, sa pokračuje v zhŕšťovaní a spresňovaní nivelačnej siete.

Výškové bodové pole rozdeľujeme na:

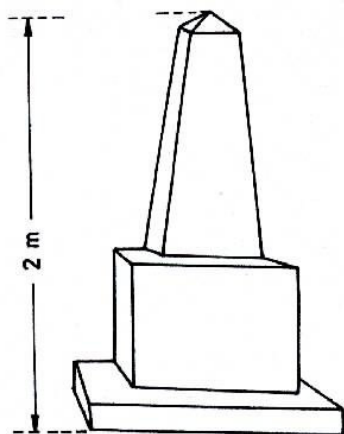
- základné výškové bodové pole (ZVBP),
- podrobné výškové bodové pole (PVBP).

Základné výškové bodové pole sa skladá:

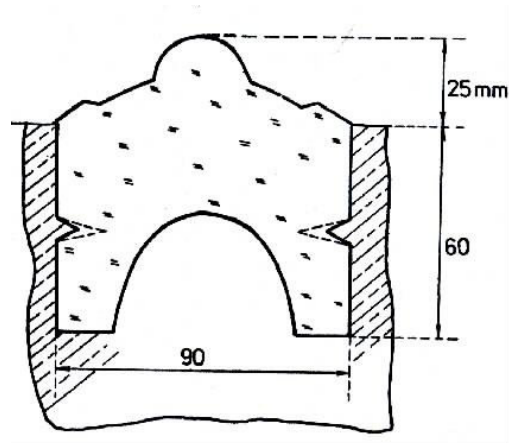
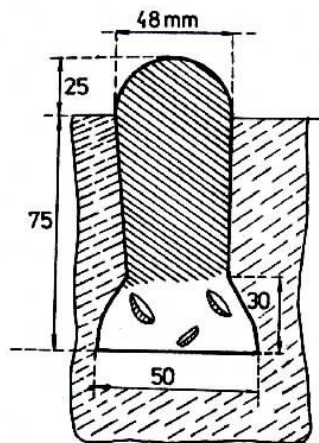
- zo základných nivelačných bodov (ZNB), (na Slovensku je 11 ZNB),
- zo Štátnej nivelačnej siete, tvorenej nivelačnými sieťami I., II. a III. rádu,
- z podrobnej nivelačnej siete, ktorú tvoria siete IV. rádu a plošné nivelačné siete.

Podrobné výškové bodové pole zahŕňa:

- stabilizované body technických nivelácií,
- body polohových a tiažových polí, ktorých výšky boli určené technickou niveláciou.



Obr. 7.4. Ochranný pomník základného nivelačného bodu Strečno



Obr. 7.5. Tvar značiek ZNB a zaisťovacích bodov

Základné nivelačné body sú rozmiestnené na geologicky pevných miestach a zaisťujú nadmorské výšky celého výškového bodového poľa. Stabilizované sú vyhladenou ploškou rozmerov 0,15 x 0,15 m na skalnom masíve asi 0,5 m pod úrovňou terénu. Značky sa chránia dutým blokom s krycím pomníkom (obr. 7.4), na ktorom je vonkajšia výšková značka k pripojovacím meraniam. Základné nivelačné body sú zaistené dvoma až štyrmi bodmi z Monelovho kovu (70 % medi a 30 % niklu),

alebo zo skla podľa obr. 7.5. Značkou zo skla sú tiež stabilizované ZNB, kde sa nedala vyhladiť ploška predstavujúca stabilizáciu výškového bodu.

Nivelačné body I. rádu tvoria uzavreté nivelačné výškové siete s obvodom 300 až 400 km. Do nivelačných sietí I. rádu sú vložené výškové siete II. rádu s odvodom asi 100 km. Najmenšie obvody majú nivelačné siete III. a IV. rádu, z ktorých siete IV. rádu sa budujú podľa potreby zhusťovaním sietí I., II. a III. rádu.

Výšky nivelačných bodov v sieťach I. rádu a II. rádu sa určovali veľmi presnou niveláciou (VPN), siete III. a IV. rádu sa určujú presnou niveláciou (PN).

Budovanie novej ŠNS sa začalo v roku 1997. Nová nivelačná sieť obsahuje I. a II. rád. Meranie siete I. rádu bolo skončené v roku 2002. Na meranie sa použili digitálne kompenzátorové nivelačné prístroje a kódové nivelačné laty.

Evidenčnou jednotkou výškových bodových polí je nivelačný polygón, alebo plošná nivelačná sieť zahrňujúca jednotlivé nivelačné body. V ŠNS sa používa označenie:

1. Nivelačné oblasti I. rádu (uzavreté nivelačné polygóny) sú označené písmenami A až O (obr. 7.6).
2. Neuzavreté hraničné oblasti (neuzavreté nivelačné polygóny) I. rádu sú označené písmenami ZA až ZS.
3. Nivelačné polygóny I. rádu sú označené kombináciou znakov susedných nivelačných oblastí I. rádu, napr. AC, ZNF, ZFZG a pod.
4. Nivelačné polygóny II. rádu sú označené poradovým číslom uvedeným za označením nivelačnej oblasti I. rádu, napr. C56, ZD13 a pod. Poradové číslo je pridelené podľa zásady označovania od západu na východ.
5. Nivelačné body v polygónoch sú označené nivelačným polygónom, spojovníkom a priebežnými číslami od čísla 500, napr. AC-555, C56-510 a pod.



Obr. 7.6. Štátna nivelačná sieť I. rádu

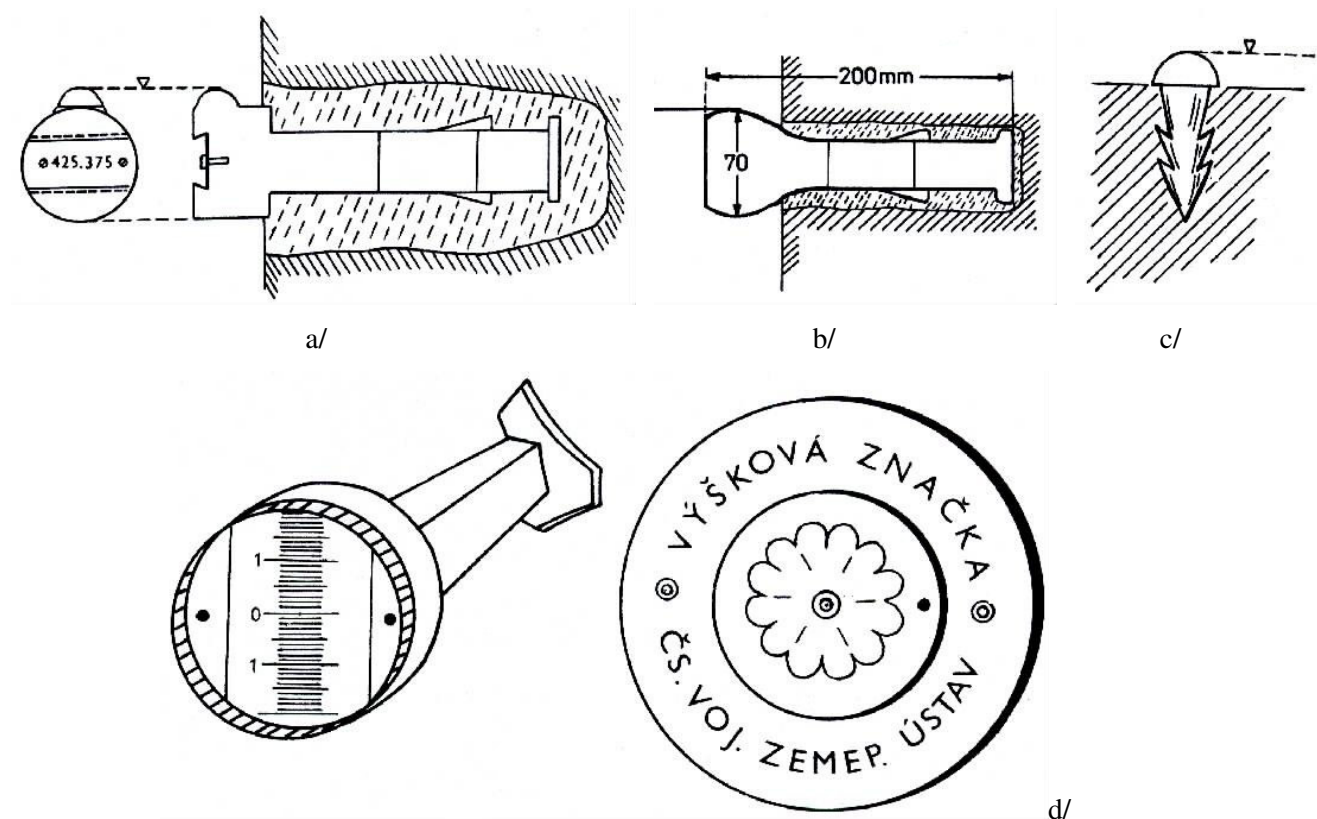
Nivelačné siete sú vybudované pozdĺž ciest a železníc a rozvetvujú sa v mestských priestoroch (podrobné nivelačné siete – PNS). Nivelačné značky sú stabilizované do vysekaných otvorov

v trvalých objektoch, o ktorých môžeme predpokladať, že sú výškovo stabilné, ako napr. masívne múry verejných budov (železničné stanice, strážne domky atď.), mostné piliere, oporné múry a pod.

Ako stabilizačný materiál sa používajú čapové (obr. 7.7a,b) a klincové značky (obr. 7.7c) rôznych tvarov. Pozdĺž železničných tratí nachádzame značky stabilizované Vojenským zemepisným ústavom vo forme stupnice vyrytej na skle (obr. 7.7d). Výšková kóta sa u nich udáva k stredu (nule) stupnice.

Čapové značky sa osadzujú nad úrovňou terénu do výšky 0,5 m, pričom sa dbá na to, aby nad značkou bol voľný priestor (asi 4,2 m) na zvislé postavenie laty. V poľných honoch, kde nie je vhodný stavebný objekt, alebo skalný podklad, osadzujú sa značky do kamenných hranolov a to buď z boku, alebo do temena (obr. 7.8). Keď je pôda málo pevná, alebo ide o nivelačnú značku väčšej dôležitosti, hranoly sa kladú na podkladnú kamennú alebo betónovú dosku.

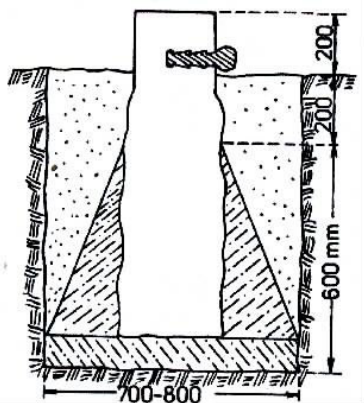
O každom výškovom bode sa vedie grafický a písomný záznam (topografia bodu), ktorý spolu s nadmorskou výškou môžeme získať v dokumentačných oddeleniach Strediska železničnej geodézie a v technickej dokumentácii katastrálneho úradu.



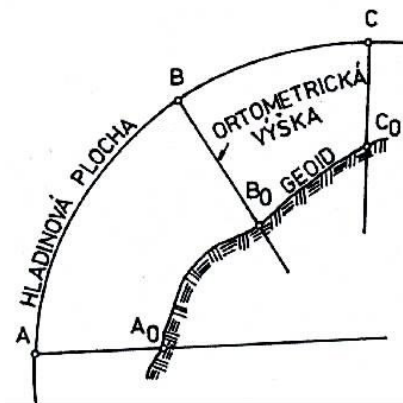
Obr. 7.7. Čapové (a, b), klincová značka (c), stupnicová nivelačná značka (d)

Základná nivelačná sieť sa vyrovnala ako celok metódou najmenších štvorcov, čím sa získali normálne ortometrické výšky, definované ako vzdialenosti bodov na zemskom povrchu od stopníkov ich tiažnic na geoidu (obr. 7.9). O dynamických výškach hovoríme vtedy, keď sa bodom ležiacim na jednej hladinovej ploche, prisudzuje rovnaká výška.

Z výšok základných výškových bodov, vzťahujúcich sa k strednej hladine Jadranského mora, sa odvodili výšky bodov nivelačných sietí. Tento výškový systém nazvaný tiež **jadranský systém**, sa nahradil v roku 1955 rozhodnutím Ústrednej správy geodézie a kartografie **baltským výškovým systémom** s normálnymi nadmorskými výškami. (Systém normálnych výšok rešpektuje skutočný priebeh hladinových plôch a nezávisí od vnútorného poľa zemskej tiaže). Výškový vzťah medzi Jadranským a Baltským systémom sa určil predbežnou hodnotou Jadran – 0,46 m = Balt, podľa ktorej sa aj označoval ako výškový systém B 46.



Obr. 7.8. Stabilizácia nivelačnej značky v poľnom hone



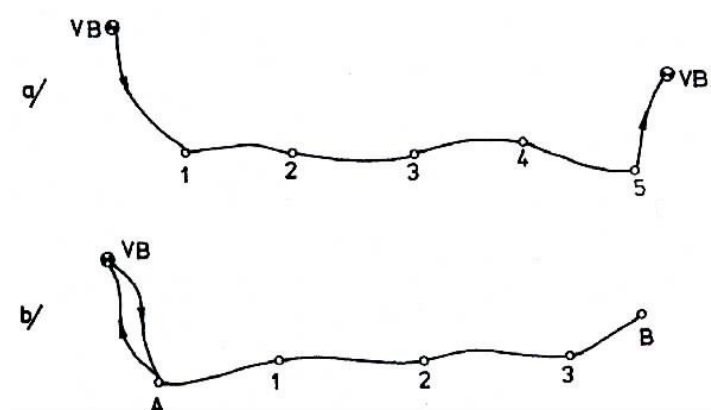
Obr. 7.9. Ortometrické výšky

Nadmorské výšky v Štátnej nivelačnej sieti sa teraz vzťahujú k strednej hladine Baltského mora pri Kronštate a výškový systém sa nazýva Baltský výškový systém po vyrovnaní (Bpv). Výšky bodov sú normálne nadmorské výšky. V tomto výškovom systéme sa majú vykonávať všetky výpočty výšok bodov, i keď pri stavebno-technických prácach lokálneho významu volíme niekedy miestny výškový systém. Vzťah medzi systémami Jadran a Bpv vyjadruje rovnica: $\text{Jadran} - 0,40 \text{ m} = \text{Bpv}$.

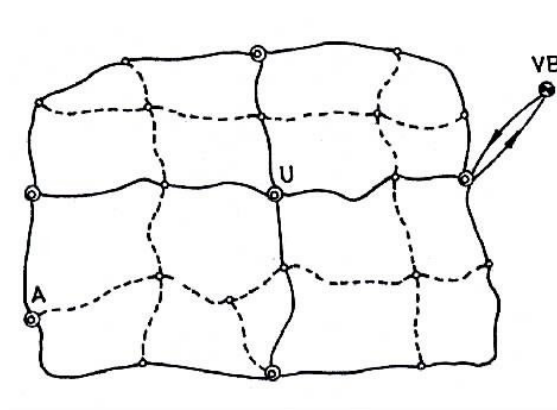
Koncepcia rozvoja nových geodetických základov Slovenska do roku 2005 predpokladá vyrovnanie ŠNS v Amsterodamskom výškovom systéme, ktorý sa vzťahuje na hladinu Severného mora. Amsterodamský výškový systém (EUVN 2000) zmení výšky Bpv v priemere o +0,15 m. Rozdiel výšok bude premenlivý v rozsahu +0,11 m až +0,19 m.

Tvorba podrobných nivelačných sietí

Existujúca sieť výškových bodov nám nebude vždy svojím rozsahom a hustotou vyhovovať, a sme nútení ju ďalej zhustiť. Keď má záujmové územie tvar úzkeho pruhu, výškové body rozmiestňujeme za sebou v rade každých 300 až 500 m, čím vytvárame nivelačný polygón, od ktorého budeme odvodzovať výšky ďalších bodov. Pozdĺž líniových stavieb napr. takýmto spôsobom budujeme hlavné výškové body (HVB). Nivelačné polygóny podľa pripojenia na nivelačnú sieť rozdeľujeme na **vložené** (votknuté) (obr. 7.10a) a **pripojené** (obr. 7.10b). Ak nivelačný polygón začína a končí na tom istom výškovom bode, hovoríme o **uzavretom nivelačnom polygóne**.



Obr. 7.10. a/ Vložený nivelačný polygón
b/ Pripojený nivelačný polygón



Obr. 7.11. Nivelačná sieť na plošne rozloženom území

V plošne rozloženom záujmovom území, ako sú napr. sídliská, veľké zoraďovacie stanice, priemyselné závody a pod., sieť budujeme nivelačnú uzavretými nivelačnými polygónmi (obr. 7.11). Najprv po obode územia a naprieč územím vybudujeme hlavné nivelačné polygóny (plné čiary na obr. 7.11), medzi ktoré vložíme vedľajšie nivelačné polygóny (čiarkované čiary na obr. 7.11).

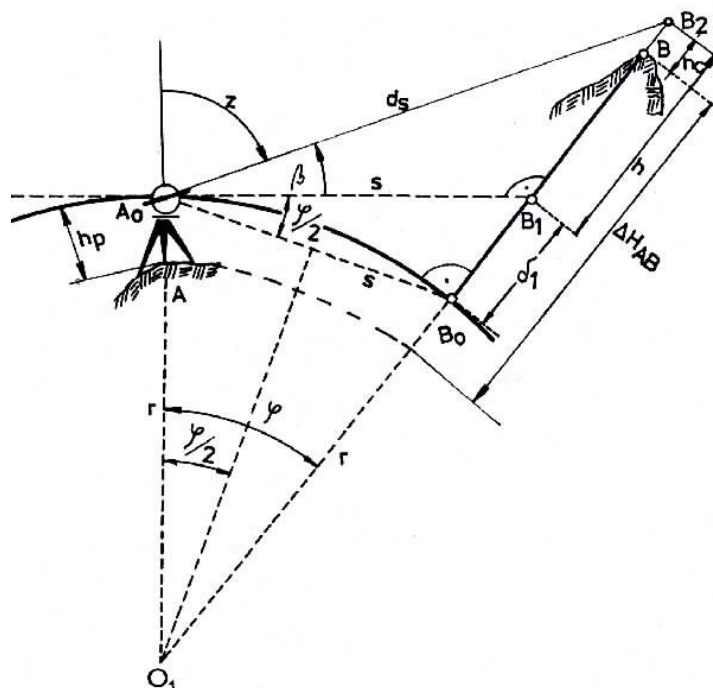
Stabilizáciu bodov podrobných nivelačných sietí vykonávame na výškovo pevných objektoch pomocou čapových a klinecových značiek (obr. 7.6), prípadne inou vhodnou stabilizáciou primeranou vyžadovanej presnosti budovanej podrobnej nivelačnej siete.

Výškové určenie bodov podrobnej nivelačnej siete vykonávame dvojstupňovo, t.j. určenie ich výšok nazahŕňame do jedného meračského postupu s určením výšok podrobných bodov, ale určíme ich oddelene a s vyššou presnosťou. Meranie v nivelačných polygónoch, či už metódou geometrickej nivelácie zo stredu, alebo trigonometrickou niveláciou, vykonávame v oboch smeroch, čím prevýšenia medzi susednými výškovými bodmi určíme dvakrát.

Pre výškové pripojovacie merania môžeme využívať aj body polohového bodového poľa, ktoré sú tiež výškovo určené. Pritom v miestopisných záznamoch bodov si všimneme, akou metódou bola určená výška bodu, či trigonometricky alebo niveláciou. Niveláciou určené výšky bodov polohového bodového poľa môžeme zapájať do výškových meraní vykonávaných technológiou technickej nivelácie.

7.2 TRIGONOMETRICKÉ MERANIE PREVÝŠENIA

Podstatou trigonometrického merania prevýšenia je riešenie trojuholníka A_0BB_0 (obr. 7.12), v ktorom sú odmerané: zenitový uhol z alebo výškový uhol β , šikmá dĺžka d_s alebo vodorovná dĺžka s . Prevýšenie bodu B nad skutočným horizontom vypočítame podľa rovnice



$$\Delta H_{AB} = h_p + \delta_1 + h - h_c, \quad (7.2)$$

v ktorej

$$h = s \tan \beta = s \cot g z = d_s \sin \beta = d_s \cos z \quad (7.3)$$

a δ_1 predstavuje opravu zo zakrivenia Zeme. Vypočítame ju podľa obr. 7.12 z rovnice

$$\delta_1 = s \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (7.4)$$

Uhol φ znamená konvergenciu tiažnic v bodoch A a B a vypočíta sa z rovnice

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r}. \quad (7.5)$$

Úpravou rovníc (7.4) a (7.5) dostaneme výraz pre opravu zo zakrivenia Zeme:

$$\delta_1 = \frac{s^2}{2r}. \quad (7.6)$$

Obr. 7.12. Oprava zo zakrivenia Zeme

V tab. 7.1 máme vyčíslené rozdiely medzi skutočným a zdanlivým horizontom.

Opravy zo zakrivenia Zeme

Tabuľka 7.1

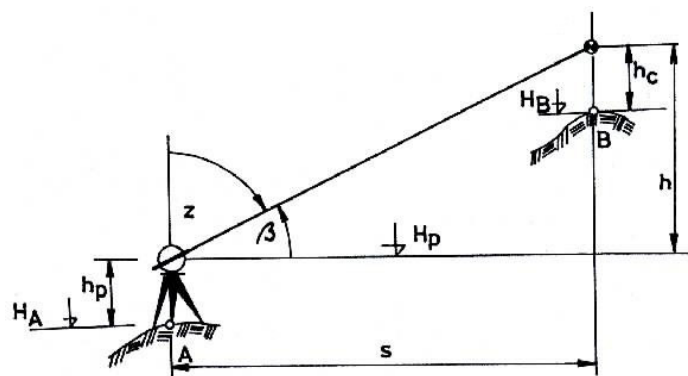
s [m]	50	100	300	360	1 000	10 000
δ_1 [m]	0,0002	0,0008	0,007	0,010	0,078	7,85

Podľa výsledkov tab. 7.1 vidíme, že na trigonometrické meranie prevýšenia v závislosti na vzdialenosti bodu od stanoviska merania vplýva zakrivenie Zeme, ku ktorému sa pridružuje aj účinok refrakcie, ktorý je odvodený v kap. 7.23. Preto z hľadiska pracovných postupov rozlišujeme trigonometrické meranie prevýšení na blízke a vzdialené body. U trigonometrického merania prevýšení na blízke body nepriradujeme opravy zo zakrivenia Zeme a refrakcie. Ak vyžadovaná presnosť merania výšok bude 10 mm, potom vzdialenosť 300 m považujeme za hranicu medzi blízкими a vzdialenými bodmi.

7.2.1 Meranie prevýšení na blízke body

Výpočet výšky bodu

Ak je daná výška bodu A , výšku bodu B určíme tak, že nad bodom A sцентриujeme a zhorizontujeme prístroj (obr. 7.13), odmeriame výšku prístroja h_p a v záujme vylúčenia účinku indexovej chyby výškový uhol odmeriame v dvoch polohách ďalekohľadu. Ak je teodolit vybavený



indexovou libelou, pred každým čítaním na výškovom kruhu prekontrolujeme jej urovnanie. Na bode B odmeriame výšku cieľa h_c a výšku bodu vypočítame podľa rovnice:

$$H_B = H_A + h_p + h - h_c. \quad (7.7)$$

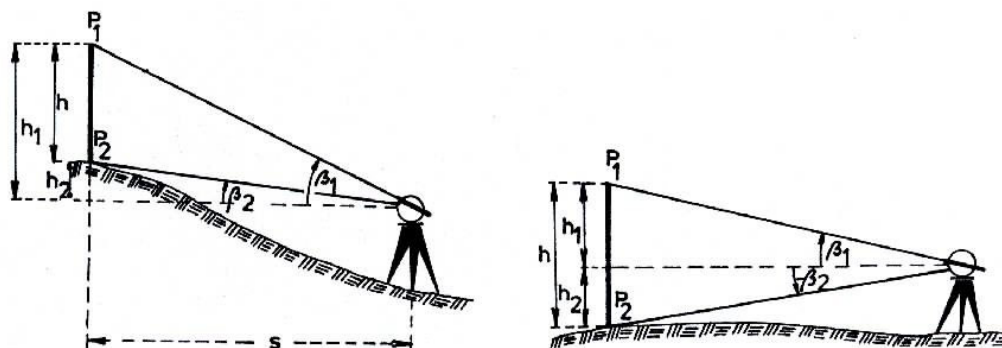
Prevýšenie h vypočítame podľa rovnice (7.3). Znamienko prevýšenia sa riadi podľa znamienka výškového uhla, alebo veľkosti zenitového uhla.

Obr. 7.13. Trigonometrické určenie výšky bodu

Keď poznáme vzdialenosť po meraní objekt, analogicky predchádzajúcemu postupu merania môžeme určiť jeho výšku (obr. 7.14) podľa rovníc:

$$h = h_1 - h_2 = s (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2), \text{ resp.} \quad (7.8)$$

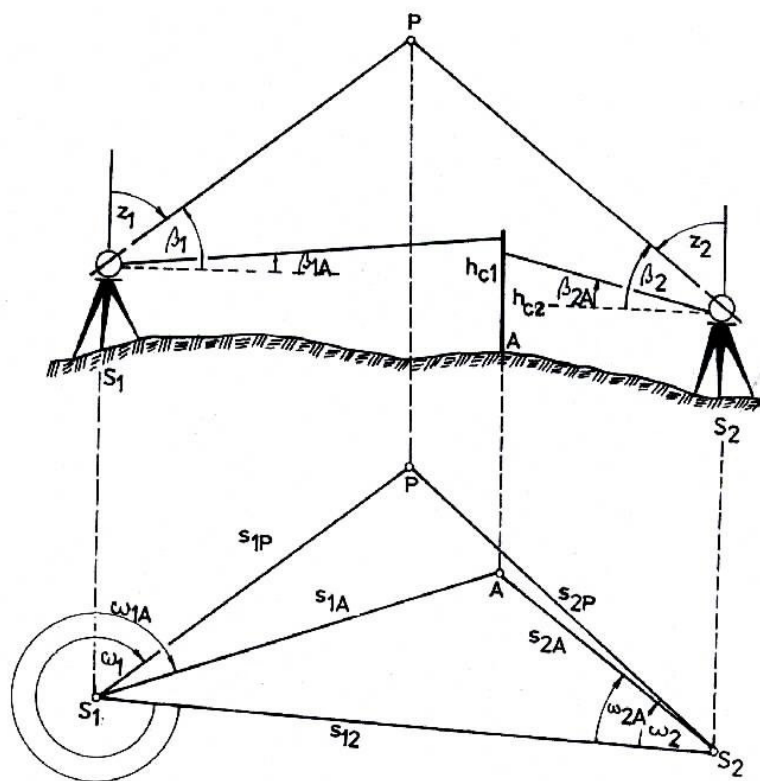
$$h = h_1 - h_2 = s (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg}(-\beta_2)).$$



Obr. 7.14. Určenie výšky objektu

Výšku objektu zriedkavo môžeme vypočítať pomocou známej vzdialenosti medzi stanoviskom prístroja a objektom, pretože zvyčajne sa jedná o určenie výšky neprístupného objektu ako napr.

priemyselnej konštrukcie, komína a pod. Vtedy uskutočníme výpočet aplikáciou vodorovného trojuholníka, alebo zvislých trojuholníkov.



Vo vhodnej vzdialenosti od objektu zvolíme dve stanoviská teodolitu S_1 a S_2 (obr. 7.15).

Odmeriame vzdialenosť s_{12} medzi oboma stanoviskami prístroja, vodorovné uhly ω_1 , ω_2 a výškové uhly na objekt P β_1 , β_2 . Na bod A , ktorého výšku poznáme, odmeriame vodorovné uhly ω_{1A} , ω_{2A} a výškové uhly β_{1A} , β_{2A} , ako aj výšky cieľa na tomto bode h_{c1} a h_{c2} .

Najprv z dĺžky s_{12} a dmeraných vodorovných uhlov vypočítame vzdialenosti od oboch stanovísk po bod P a po bod A :

Obr. 7.15. Trigonometrické určenie výšky objektu s vodorovným trojuholníkom

$$\begin{aligned} s_{1P} &= s_{12} \frac{\sin \omega_2}{\sin[(400^\circ - \omega_1) + \omega_2]}, & s_{1A} &= s_{12} \frac{\sin \omega_{2A}}{\sin[(400^\circ - \omega_{1A}) + \omega_{2A}]} \\ s_{2P} &= s_{12} \frac{\sin(400^\circ - \omega_1)}{\sin[(400^\circ - \omega_1) + \omega_2]}, & s_{2A} &= s_{12} \frac{\sin(400^\circ - \omega_{1A})}{\sin[(400^\circ - \omega_{1A}) + \omega_{2A}]} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Výška bodu P sa podľa obr. 7.15 určí dvakrát, čo je vítanou kontrolou merania a výpočtu:

$$H_P = H_A + h_{c1} - h_{1A} + h_{1P}$$

$$H_P = H_A + h_{c2} - h_{2A} + h_{2P} \quad (7.10)$$

Prevýšenia určíme podľa rovnice (7.3):

$$h_{1P} = s_{1P} \operatorname{tg} \beta_1, \quad h_{1A} = s_{1A} \operatorname{tg} \beta_{1A},$$

$$h_{2P} = s_{2P} \operatorname{tg} \beta_2, \quad h_{2A} = s_{2A} \operatorname{tg} \beta_{2A}.$$

Skrátenie výpočtu docielime, ak výšky horizontov oboch stanovísk odvodíme meraním s vodorovnou zámerou ($\beta_{1A} = \beta_{2A} = 0$), potom nemusíme určovať dĺžky s_{1A} a s_{2A} a prevýšenie $h_{1A} = h_{2A} = 0$. Ak sa nedá docieľiť zostava z obr. 7.15 a výškové pripojenia na bod A môžeme vykonať len pomocou niektorého z bodov S_1 a S_2 , potom musíme určiť aj prevýšenie medzi bodmi S_1 a S_2 .

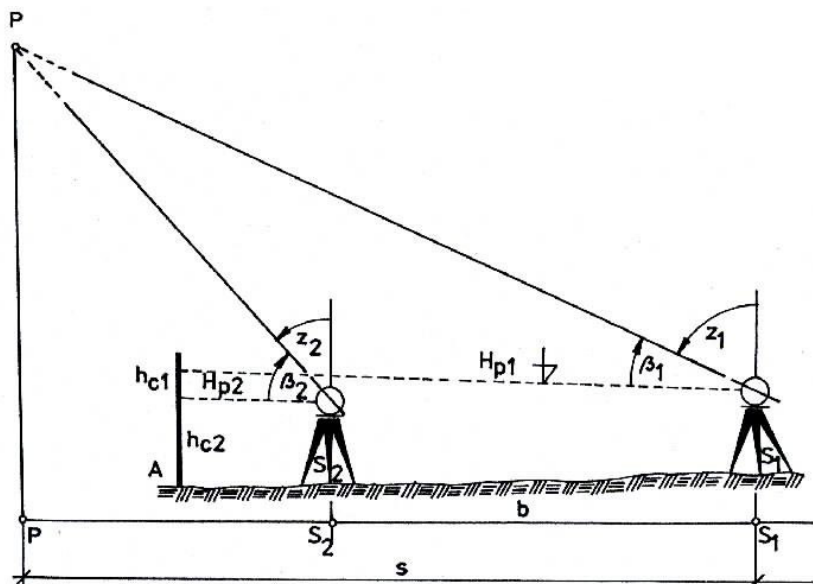
Niekedy okolitá zástavba alebo terénne prekážky nedovolia aplikovať vodorovný trojuholník, vtedy použijeme riešenie so zvislým trojuholníkom.

Vo vhodnej vzdialenosti od objektu si zvolíme stanovisko S_1 (obr. 7.16) a stanovisko S_2 vytýčime tak, aby ležalo vo zvislej rovine, prechádzajúcej stanoviskom S_1 a meraným bodom P .

Vzdialenosť medzi stanoviskami volíme primerane dlhú (asi $\frac{1}{2}s$) a dĺžku $b = S_1S_2$ odmeriame priamo pásmom alebo diaľkomerom. Na stanoviskách S_1 a S_2 odmeriame výškové uhly β_1 a β_2 a zaistíme pripojenie stanovísk na výškový bod A , napr. ako to máme naznačené na obr. 7.16.

Výšku bodu P vypočítame z rovníc:

$$H_p = H_A + h_{c1} + s \operatorname{tg} \beta_1 = H_A + h_{c2} + (s - b) \operatorname{tg} \beta_2. \quad (7.12)$$



Obr. 7.16. Trigonometrické určenie výšky objektu so zvislými trojuholníkmi

Z rovnice (7.12) vypočítame dĺžku s :

$$s = \frac{h_{c2} - h_{c1} - b \operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2}, \quad (7.13)$$

ktorú keď dosadíme do rovníc (7.12), vypočítame hľadanú výšku bodu P . Výpočet výšky bodu P je bez kontroly, ktorú zaistíme meraním z ďalšieho stanoviska S_3 .

7.2.2 Trigonometrická nivelácia

Trigonometrickou niveláciou označujeme niveláciu so sklonenou zámerou ($\beta \neq 0$). Aplikujeme ju hlavne v členitom teréne, a to v prípadoch, keď sme určili dĺžky pre iné účely (napr. pre polohové zhustenie bodového poľa polygónmi). Odmerané prvky trigonometrickej nivelácie sú výškové (zenitové) uhly, dĺžky, výšky cieľov. Trigonometrickou niveláciou aplikovanou s elektronickým teodolitom dosahujeme presnosť technickej nivelácie (pozri kritériá technickej nivelácie v kap. 7.37). Trigonometrická nivelácia má niekoľko obmien. Najčastejšie sa používa postup merania, keď sa prístroj umiestňuje približne do stredu medzi body, ktorých určujeme výšky (obr. 7.17).

Na stanoviskách S_1, S_2, \dots, S_i odmeriame výškové uhly $\beta_A, \beta_1, \dots, \beta_i$, resp. zenitové uhly z_A, z_1, \dots, z_i , príslušné dĺžky s_A, s_1, \dots, s_i , ako aj výšky cieľa na meraných bodoch $h_{cA}, h_{c1}, \dots, h_{ci}$. Pre výškový rozdiel medzi bodmi A a B platí:

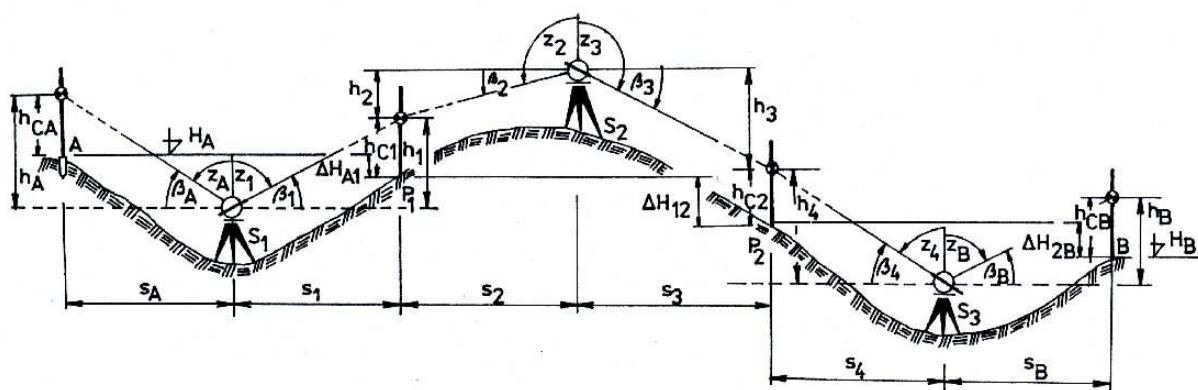
$$\Delta H_{AB} = \sum \Delta H. \quad (7.14)$$

Výšky bodov P_1, P_2, \dots, P_i ak je známa výška bodu A , vypočítame z rovníc:

$$\begin{aligned}
H_1 &= H_A + \Delta H_{A1} \\
H_2 &= H_1 + \Delta H_{12} \\
&\vdots \\
H_B &= H_{n-1} + \Delta H_{(n-1)B},
\end{aligned}
\tag{7.15}$$

pričom výškové rozdiely medzi susednými bodmi P_i, P_{i+1} postupne určíme z rovníc:

$$\begin{aligned}
\Delta H_{A1} &= (h_{cA} - h_A) - (h_{c1} - h_1) = s_A \operatorname{tg} \beta_1 - s_A \operatorname{tg} \beta_A + (h_{cA} - h_{c1}), \\
\Delta H_{12} &= (h_{c1} - h_2) - (h_{c2} - h_3) = s_3 \operatorname{tg} \beta_3 - s_2 \operatorname{tg} \beta_2 + (h_{c1} - h_{c2}), \\
\Delta H_{2B} &= (h_{c2} - h_4) - (h_{cB} - h_B) = s_B \operatorname{tg} \beta_B - s_4 \operatorname{tg} \beta_4 + (h_{c2} - h_{cB}).
\end{aligned}
\tag{7.16}$$



Obr. 7.17. Trigonometrická nivelácia

Keď sú dĺžky $s > 300$ m, k určeným prevýšeniam pripojíme opravy zo zakrivenia Zeme a dodržiavame technológiu merania s vylúčením refrakcie.

Predpis pre JŽM vymedzuje krajnú odchýlku v trigonometrickom nivelačnom polygóne hodnotou $\rho_{\max} = 80\sqrt{R}$ [mm], keď $R_{\max} = 3$ km.

7.2.3 Meranie prevýšení na väčšie vzdialenosti

Ako sme si ukázali v tab. 7.1, odmerané prevýšenie znehodnocuje vplyv zakrivenia Zeme, ku ktorému sa ešte pridružuje účinok refrakcie.

Účinok refrakcie na merané prevýšenie

Z fyzikálnych vlastností ovzdušia vieme, že vzduchové vrstvy obklopujúce povrch Zeme nie sú všade rovnako husté. Hustota ovzdušia klesá s narastajúcou výškou. Svetelný lúč pri prechode nehomogénnymi vrstvami ovzdušia nepostupuje priamočiari, ale sa láme a jeho dráha nadobúda tvar plochého oblúka, obráteného k povrchu Zeme. Tento jav označujeme ako **refrakcia**. Na obr. 7.18 vľavo je znázornený chod svetelného lúča ovzduším a jeho účinok na výškový uhol β . Namiesto skutočného výškového β_h uhla odmeriame uhol β , v ktorom je zahrnutý aj účinok refrakcie.

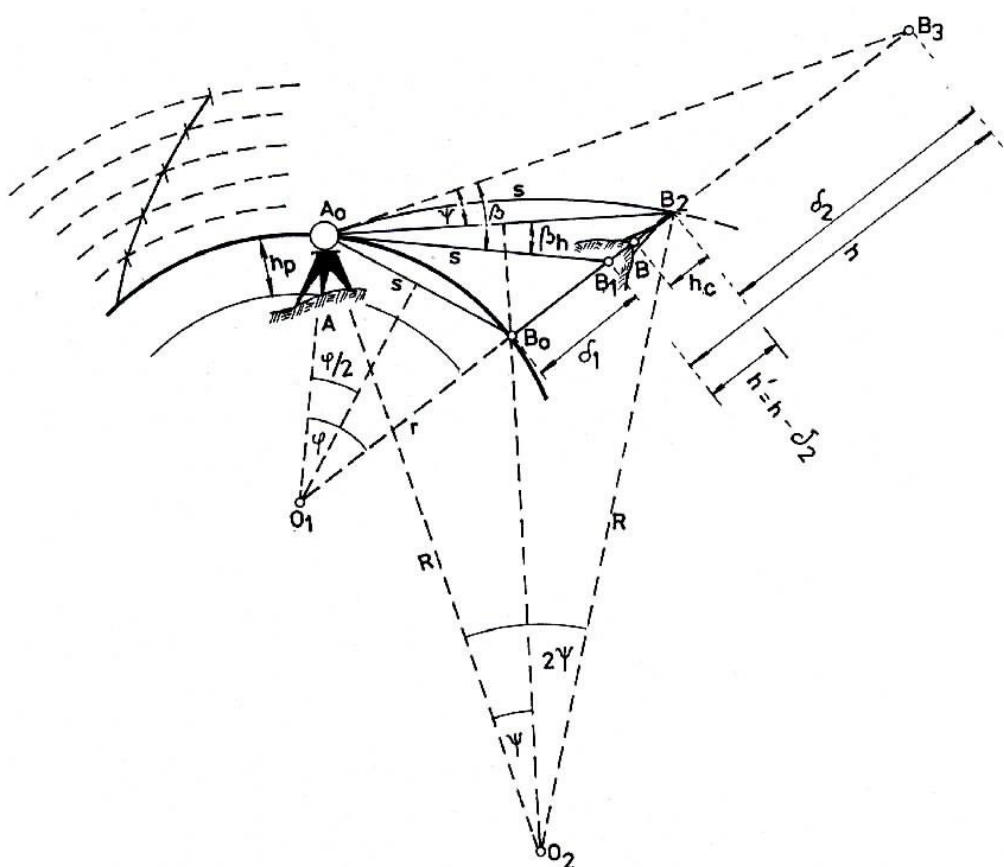
Opravu z refrakcie vypočítame z trojuholníkov $A_0B_2O_2$ a $A_0B_0O_1$. Keď uvažujeme, že prevýšenie B_2B_0 k polomeru Zeme je zanedbateľné a dĺžka $A_0B_0 \approx AB$, dĺžku oblúka s môžeme vypočítať dvakrát:

$$\operatorname{arc} s = 2R\psi / \rho$$

$$\text{arc } s = r\varphi / \rho \quad . \quad (7.17)$$

Porovnaním oboch rovníc dostaneme refrakčný uhol ψ :

$$\psi = \frac{r}{R} \frac{\varphi}{2} = k \frac{s}{2r} \quad . \quad (7.18)$$



Obr. 7.18. Oprava z refrakcie

Pomer r/R sa nazýva refrakčný koeficient k . Jeho hodnota nie je stála, mení sa v závislosti na atmosferických podmienkach (teplota, tlak a vlhkosť vzduchu), nadmorskej výške, v ktorej vykonáme meranie, prostredí, ktorým prechádza zamera (štrkové lôžko na železnici, pieskoviská, vegetačný porast a pod.). Hodnotu refrakčného koeficienta $k = 0,13$ určil Gauss. V našich oblastiach sa hodnota refrakčného koeficienta pohybuje v medziach 0,08 až 0,18. Stretávame sa aj s prekvapujúcim rozptylom jeho hodnoty hlavne pri meraní na železničnej trati, kedy nadobúda hodnoty v intervale $-2,0 \leq k \leq 2,0$.

Prevýšenie $h' = (h - \delta_2)$ vypočítame z rovnice:

$$h' = s \operatorname{tg}(\beta - \psi) = s \operatorname{tg}\left(\beta - k \frac{s}{2r}\right) = s \operatorname{tg}\beta - k \frac{s^2}{2r} \quad . \quad (7.19)$$

Druhý člen v rovnici (7.19) predstavuje opravu z účinku refrakcie

$$\delta_2 = k \frac{s^2}{2r} \quad .$$

Výšku bodu B si odvodíme podľa obr. 7.18:

$$H_B = H_A + h_p + \delta_1 + h - \delta_2 - h_c = H_A + (h_p - h_c) + s \operatorname{tg}\beta + s^2 \frac{1-k}{2r} \quad . \quad (7.20)$$

Posledný člen rovnice $O_r = s^2 \frac{1-k}{2r}$ vyjadruje opravu zo zakrivenia Zeme a refrakcie. V tab. 7.2 je vyznačený účinok zakrivenia Zeme, refrakcie a spoločný účinok zakrivenia Zeme a refrakcie na trigonometricky merané prevýšenia, keď $k = 0,13$ a $r = 6370$ km.

Vplyv zakrivenia Zeme a refrakcie na trigonometricky merané prevýšenia						Tabuľka 7.2
s [m]	50	100	300	360	1 000	10 000
δ_1	0,0002	0,0008	0,007	0,010	0,078	7,85
δ_2	0,0	0,0001	0,001	0,001	0,010	1,02
$O_r = \delta_1 - \delta_2$	0,0002	0,0007	0,006	0,009	0,068	6,83

Postup merania a vylúčenia účinku refrakcie

Výškový uhol β (alebo zenitový uhol z) v záujme odstránenia indexovej chyby meriame v dvoch polohách ďalekohľadu. Počet meraní sa riadi požiadavkami na presnosť, pričom sa zohľadňuje použitý teodolit.

Účinok refrakcie nemôžeme presne vylúčiť výpočtom s refrakčným koeficientom, pretože nikdy nepoznáme jeho momentálnu hodnotu. V niektorých prípadoch použitím koeficienta $k = 0,13$ ešte zhoršujeme určované hodnoty prevýšení. Účinok refrakcie môžeme vylúčiť súčasným meraním výškových uhlov na obidvoch bodoch, ktorých výškový rozdiel určujeme. Podmienku súčasného merania na obidvoch bodoch ešte splníme, keď meranie vykonáme i v dvoch po sebe idúcich dňoch, avšak za rovnakých atmosferických podmienok (stále počasie) a v rovnakých hodinách merania. Najvhodnejšie sú k tomu odpoľudňajšie hodiny od 13 do 15 hodiny, kedy koeficient k má malú hodnotu a dlhšiu dobu sa nemení. Takýto postup volíme v prípadoch, ak nemôžeme merať v ten istý deň s časovým odstupom do 1 až 2-och hodín. Prevýšenie potom určíme podľa rovníc:

$$\Delta H_{AB} = (h_{pA} - h_{cB}) + s \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{s^2}{2r} - k \frac{s^2}{2r} \quad (7.21)$$

$$\Delta H_{BA} = (h_{pB} - h_{cA}) + s \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{s^2}{2r} - k \frac{s^2}{2r}.$$

Upravením druhej rovnice a spočítaním oboch rovníc dostaneme prevýšenie, v ktorom sa už neobjavuje vplyv zakrivenia Zeme a účinok refrakcie:

$$\Delta H = \frac{1}{2} [(h_{pA} - h_{pB}) + (h_{cA} - h_{cB}) + s(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2)]. \quad (7.22)$$

Znamienka funkcií tangens sa riadia podľa znamienok uhlov β_1 a β_2 .

7.2.4 Presnosť trigonometrického merania prevýšení

Presnosť trigonometricky odmeraného prevýšenia ΔH podľa rovnice (7.20) vyjadríme podľa zákona hromadenia stredných chýb výrazom:

$$m_{\Delta H} = \sqrt{m_{hp}^2 + m_{hc}^2 + \left[\operatorname{tg}^2 \beta + \left(\frac{1-k}{r} s \right)^2 \right] m_s^2 + \left(\frac{s}{\cos^2 \beta} \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 + \left(-\frac{s^2}{2r} \right)^2 m_k^2}, \quad (7.23)$$

kde m_{hp} a m_{hc} sú stredné chyby určenia výšky prístroja a cieľa,

m_s je stredná chyba, s ktorou sme určili vzdialenosť medzi bodmi,

m_β je stredná chyba merania výškových uhlov.

Výšku prístroja a cieľa vieme určiť s presnosťou na milimetre a v rovnici (7.23) ich účinok nemusíme uvažovať. Vo väčšine prípadov výškový uhol β má malú hodnotu a $\cos^2 \beta = 1$. Taktiež