

## 10. TRANSFORMÁCIA SÚRADNÍC

Transformácia rôznorodých súradníc s vyrovnaním MNŠ sa veľmi často používa v deformačnej analýze meraní vodorovných posunov na transformáciu bodov určených metódou GPS, transformáciu fotogrametrických súradníc, určovanie polohy prechodného stanoviska pri zameriavaní zmien v katastri nehnuteľností a pod. Ide o transformáciu rôznorodých súradníc z jedného súradnicového systému do druhého súradnicového systému. Súradnice dvoch súradnicových systémov považujeme za rôznorodé, keď pochádzajú z rôznych meraní. Ak sa posunie sieť bodov v smere súradnicových osí o hodnoty  $x_0$ ,  $y_0$  (translácia), pootočí sa o uhol  $\omega$  (rotácia) a upraví sa jej mierka, hovoríme o podobnostnej (lineárnej, konformnej) transformácii. Ak sú k dispozícii viac ako dva identické body v oboch systémoch hľadáme optimálne riešenie, obyčajne také, aby bola splnená podmienka vyrovnania MNŠ. Pre optimalizáciu môžeme určiť aj iné optimalizačné kritériá. Vyrovnaním (optimalizáciou) určíme parametre transformácie, ktoré predstavujú sprostredkujúce veličiny.

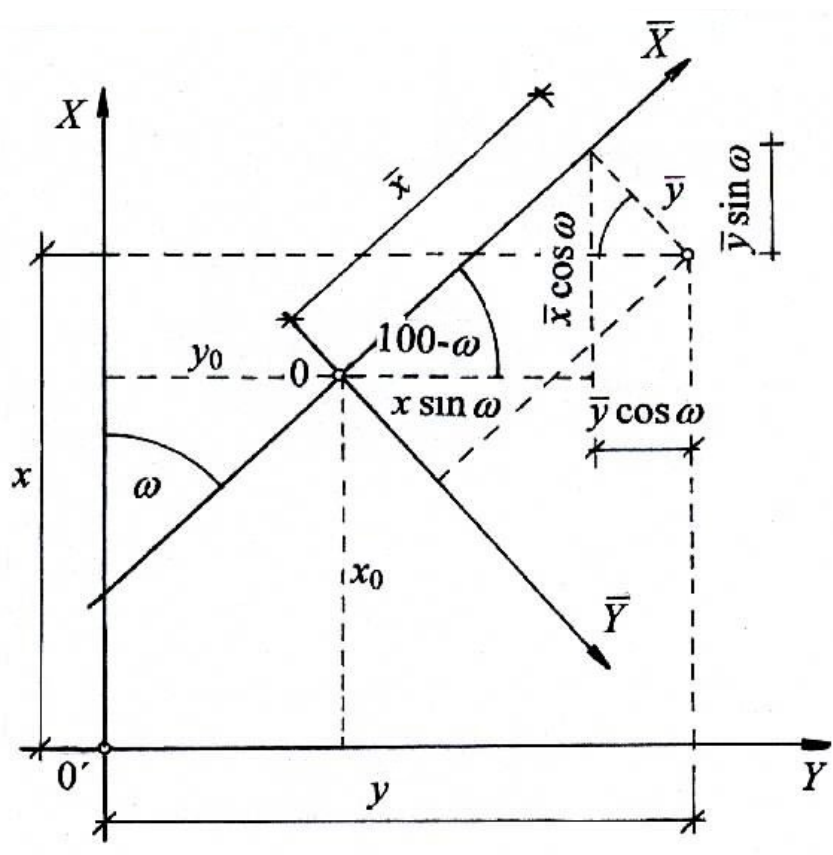
Najčastejšie sa používa **Helmertova transformácia**, ktorá je založená na splynutí ťažísk oboch súradnicových systémov. Rozdiely medzi danými a transformovanými súradnicami identických bodov spĺňajú podmienku vyrovnania MNŠ vtedy keď,

$$\sum v^2 = \sum v_y^2 + \sum v_x^2 = \min., \quad (10.1)$$

kde

$$v_y = y^* - y \quad \text{a} \quad v_x = x^* - x \quad (10.2)$$

sú opravy v smere súradnicových osí  $Y$  a  $X$ ,  $y^*$ ,  $x^*$  sú dané (pôvodné) súradnice,  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$  sú súradnice ktoré transformujeme (odmerané súradnice),  $y$ ,  $x$ , sú nové súradnice po transformácii. Transformujeme nové meranie v súradnicovom systéme  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}$  do pôvodného merania v súradnicovom systéme  $Y$ ,  $X$ .



Obr.10.1. Transformácia súradníc

Z obr.10.1 vyplýva

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \bar{y} \cos \omega + \bar{x} \sin \omega, \\ x &= \bar{x}_0 - \bar{y} \sin \omega + \bar{x} \cos \omega, \end{aligned} \quad (10.3)$$

kde  $y_0, x_0$  sú súradnice začiatku nového (zatiaľ netransformovaného) súradnicového systému a  $\omega$  je uhol pootočenía osí  $\bar{X}$  a  $X$ .

Poznámka. Pre zápornú hodnotu uhla  $-\omega$  rovnice (10.3) budú mať tvar

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \bar{y} \cos \omega - \bar{x} \sin \omega, \\ x &= \bar{x}_0 + \bar{y} \sin \omega + \bar{x} \cos \omega, \end{aligned}$$

V geodézii obyčajne nepovažujeme dĺžky  $s^*$  (pôvodná) a  $s$  (novoodmeraná) za identické. Zmenu mierky vyjadríme zavedením koeficienta vypočítaného z pomeru dĺžok  $q = y^*/y$ , resp.  $q = x^*/x$

$$\begin{aligned} y &= y_0 + q \bar{y} \cos \omega + q \bar{x} \sin \omega, \\ x &= x_0 - q \bar{y} \sin \omega + q \bar{x} \cos \omega. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Ak do rovníc (10.4) dosadíme

$$\begin{aligned} a &= q \cos \omega, \\ b &= q \sin \omega, \end{aligned}$$

dostaneme **transformačné rovnice**

$$\begin{aligned} y &= y_0 + a \bar{y} + b \bar{x}, \\ x &= x_0 - b \bar{y} + a \bar{x}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Po dosadení do rovníc opráv (10.2) bude platiť

$$\begin{aligned} v_y &= y^* - y = y^* - y_0 - a \bar{y} - b \bar{x}, \\ v_x &= x^* - x = x^* - x_0 + b \bar{y} - a \bar{x}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Pre  $n$  identických bodov dostaneme  $n$  takýchto rovníc. Ak ich potom spočítame, dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum v_y &= \sum y^* - n y_0 - a \sum \bar{y} - b \sum \bar{x} = 0, \\ \sum v_x &= \sum x^* - n x_0 + b \sum \bar{y} - a \sum \bar{x} = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Z rovníc (10.7) vypočítame  $y_0, x_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\sum y^*}{n} - a \frac{\sum \bar{y}}{n} - b \frac{\sum \bar{x}}{n}, \\ x_0 &= \frac{\sum x^*}{n} + b \frac{\sum \bar{y}}{n} - a \frac{\sum \bar{x}}{n}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

ktoré dosadíme do rovníc opráv (10.6)

$$v_y = y^* - \frac{\sum y^*}{n} - a \bar{y} + a \frac{\sum \bar{y}}{n} - b \bar{x} + b \frac{\sum \bar{x}}{n},$$

$$v_x = x^* - \frac{\sum x^*}{n} + b\bar{y} - b\frac{\sum \bar{y}}{n} - a\bar{x} + a\frac{\sum \bar{x}}{n}. \quad (10.9)$$

Keď vypočítame súradnice redukované na ťažisko

$$\begin{aligned} y_r^* &= y^* - \frac{\sum y^*}{n}, & x_r^* &= x^* - \frac{\sum x^*}{n}, \\ y_r &= \bar{y} - \frac{\sum \bar{y}}{n}, & x_r &= \bar{x} - \frac{\sum \bar{x}}{n}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

môžeme rovnice (10.9) upraviť

$$\begin{aligned} v_y &= y_r^* - a y_r - b x_r, \\ v_x &= x_r^* + b y_r - a x_r. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Pre súradnice ťažiska platí:  $\sum y_r^* = \sum x_r^* = \sum y_r = \sum x_r = 0$ .

Neznáme koeficienty  $a$ ,  $b$  určíme vzhľadom na podmienku minima (10.1)

$$\sum (y_r^* - a y_r - b x_r)^2 + \sum (x_r^* + b y_r - a x_r)^2 = \min..$$

Po derivácii podľa  $a$ , pre všetky  $i = 1, \dots, n$ , po spočítaní bude platiť:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum v^2}{\partial a} &= \sum 2(y_r^* - a y_r - b x_r) y_r + \sum 2(x_r^* + b y_r - a x_r) x_r = 0, \\ \sum y_r^* y_r - a \sum y_r^2 - b \sum x_r y_r + \sum x_r^* x_r - a \sum x_r^2 + b \sum y_r x_r &= 0, \\ a &= \frac{\sum y_r^* y_r + \sum x_r^* x_r}{\sum y_r^2 + \sum x_r^2}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Podobne derivujeme podľa  $b$  a dostaneme

$$b = \frac{\sum y_r^* x_r - \sum x_r^* y_r}{\sum y_r^2 + \sum x_r^2}. \quad (10.13)$$

Koeficienty  $a$ ,  $b$  (parametre transformácie) sú určené vyrovnaním MNŠ. Ak nie sú vo vstupných súradniciach odľahlé údaje (alebo hrubé chyby), potom súradnice vypočítané z transformačných rovníc (10.5) sú najpravdepodobnejším odhadom pôvodných súradníc pre danú oblasť. Tento spôsob prvý použil Helmert a preto sa po ňom označuje ako Helmertova transformácia.

Odhady stredných chýb vypočítame zo vzťahov:

$$m_y = \sqrt{\frac{\sum v_y^2}{n}}, \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum v_x^2}{n}}, \quad m_p = \sqrt{m_y^2 + m_x^2}, \quad (10.14)$$

kde  $n$  je počet identických transformovaných bodov.

Transformáciu ďalších (neidentických) bodov  $P_i(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$  zo súradnicového systému  $\bar{Y}, \bar{X}$  dostaneme vyčíslením transformačných rovníc (10.5).

**Príklad 10.1** Máme úlohu transformovať skupinu bodov ( $n = 5$ ) v miestnom súradnicovom systéme (odmerané súradnice) do systému S-JTSK (dané súradnice). V oboch systémoch máme 3 identické body. Príklad 10.1 predstavuje ukážku výstupu výsledku transformácie programovým výpočtom.

#### TRANSFORMÁCIA SÚRADNÍC

| Odmerané súradnice |           | Dané súradnice |           | Súradnice po transformácii |           |         |           |         |
|--------------------|-----------|----------------|-----------|----------------------------|-----------|---------|-----------|---------|
| Č. bodu            | $\bar{y}$ | $\bar{x}$      | $y^*$     | $x^*$                      | $y$       | $v_y$   | $x$       | $v_x$   |
| 12                 | 9058,8360 | 2324,2320      | 9212,1510 | 2254,9960                  | 9212,1535 | 0,0025  | 2254,9983 | 0,0023  |
| 15                 | 9194,2180 | 2419,6660      | 9194,2330 | 2419,6660                  | 9194,2336 | 0,0006  | 2419,6601 | -0,0059 |
| 18                 | 9128,8220 | 2516,1530      | 9078,1510 | 2409,1770                  | 9078,1478 | -0,0032 | 2409,1806 | 0,0036  |
| 14                 | 9058,6080 | 2473,2290      |           |                            | 9081,6926 |         | 2326,9639 |         |
| 145                | 9016,3650 | 2508,9370      |           |                            | 9029,9934 |         | 2307,3023 |         |

Koeficient mierky transformácie = 0,999976,  $m_y = 0,0024$  m,  
 Pootočenie systému = 67,811160°,  $m_x = 0,0042$  m,  $m_p = 0,0048$  m.