

# 1. MERAČSKÉ A VÝPOČTOVÉ PRÁCE NA URČENIE MERANÝCH VODOROVNÝCH SMEROV A UHLOV

Polohovo terestricky zhustená sieť bodového poľa je zameraná vo vzťahu k okolitým bodom trigonometrickej siete a má tvar **plošne** alebo **líniovo** rozmiestnenej siete. Je určená súradnicami daných trigonometrických bodov (vzťažných bodov), odmeranými smermi, uhlami, dĺžkami a často aj ich vzájomnou kombináciou. Pri zhusťovaní bodového poľa si kvalitatívne porovnáme odmerané uhly a smery a pripravíme ich na zaradenie do vyrovnania a do výpočtov.

## Vhodnosť merania smerov a uhlov

Základná odpoveď na otázku, či je vhodné merať smery alebo uhly je daná účelom budovanej siete a požiadavkou na jej presnosť. Pre lokálnu sieť je v SR meračskými predpismi stanovená metóda **merania smerov v skupinách**. Pri náročných požiadavkách na presnosť niektorých účelových sietí sa nedá zaobiť bez použitia niektorej z metód merania **uhlov**, ktorej základom je meranie uhlov v **laboratórnej jednotke**.

## Rozdiel medzi meraním uhlov a meraním smerov

Vodorovný uhol je uhlová odľahlosť dvoch zvislých rovín preložených stanoviskom a cieľovými bodmi., určenými pravou a ľavou zámerou. Jednotlivé odmerané uhly sú náhodné, nezávislé veličiny.

Smery sú určované od východiskového postavenia limbu teodolitu, pri ktorom je čítací index približne nastavený na čítanie 0,0000<sup>g</sup>. Jednotlivé smery sú závislými, náhodnými veličinami. Meranie uhlov je zvláštnym prípadom merania smerov. Pri riešení otázok meračskej presnosti a otázok súvisiacich s vyrovnaním metódou najmenších štvorcov (MNŠ) je nutné rozlišovať obidva spôsoby merania.

Bohatá geodetická literatúra 19. storočia svedčí o záujme venovanom rozdielu merania uhlov a smerov. Autormi článkov sú BESSEL, STRUVE, SCHREIBER. Výsledkom bolo odporúčenie merať v základných sieťach **uhly**, lebo

- sú menej ovplyvnené chybami vyplývajúcimi z nepevného postavenia prístroja a zo zmien atmosféry závislých na čase,
- umožňujú viacnásobné nastavenie na cieľ a krátia časové straty vyplývajúce z obsluhy prístroja a zdroja osvetlenia,
- dovoľujú meniť presnosť meraných veličín počtom opakovaných meraní. Vhodne zostaveným programom merania jednotlivého uhla môžeme doceliť elimináciu konštantne pôsobiacich chýb (viď metóda merania uhlov v laboratórnej jednotke),
- sú vhodné pri výskyte zámer, ktorých meranie je z rôznych príčin obtiažne a je potrebné ich zamerať, v čo najkratšom čase.

Preto sa už v 19. storočí začali používať v základných sieťach a v sieťach vyšších radov metódy merania uhlov, ale v sieťach nižších radov sa používali rýchlejšie metódy merania smerov.

Pri meraní **uhlov** používame tieto metódy: Schreiberovú, sektorovú, francúzsku (metóda merania uhlov od základného smeru), vrcholovú (Československá metóda), meranie uhlov v laboratórnej jednotke (autor Ing. Křovák).

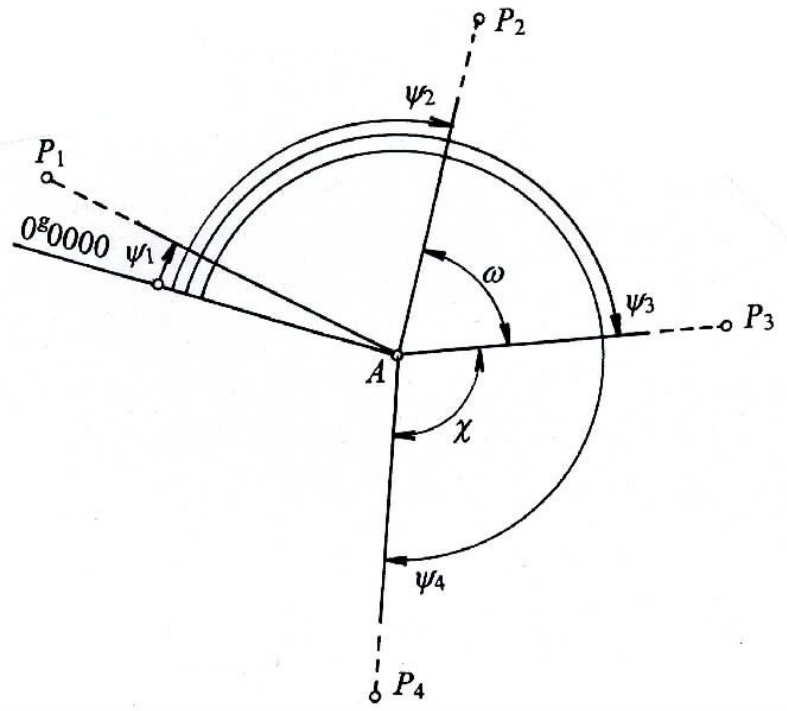
Pri meraní smerov používame metódu merania smerov v skupinách (t.j. v úplných skupinách) a v neúplných skupinách.

## Porovnanie presnosti meraných smerov a uhlov

Uhol je rozdielom pravého a ľavého smeru (obr. 1.1).

$$\omega = \psi_3 - \psi_2,$$

$$\chi = \psi_4 - \psi_3.$$



Obr. 1.1. Meranie smerov

Ak poznáme základnú strednú chybu meraného smeru  $\bar{m}_\psi$ , potom je stredná chyba jedenkrát od meraného uhla  $\omega'$  pri rovnakej presnosti merania smerov ( $\bar{m}_{\psi_1} = \bar{m}_{\psi_2} = \bar{m}_\psi$ ) určená zákonom o hromadení stredných chýb

$$\bar{m}_{\omega'}^2 = \bar{m}_\psi^2 + \bar{m}_\psi^2 = 2\bar{m}_\psi^2, \quad (1.1)$$

$$\bar{m}_{\omega'} = \bar{m}_\psi \sqrt{2}.$$

Ak je  $p_\psi$  váha smeru a  $p_{\omega'}$  váha jedenkrát od meraného uhla, potom je ich pomer určený

$$p_{\omega'} : p_\psi = \frac{1}{2\bar{m}_\psi^2} : \frac{1}{\bar{m}_\psi^2} = 1 : 2 \quad (1.2)$$

**Jednoduché** meranie uhlov má polovičnú váhu v porovnaní s jednoduchým meraním smerov. Opakovaným meraním sa zväčší váha – dvojité meranie uhlov (tzv. meranie jednej skupiny v dvoch polohách ďalekohľadu). Stredná chyba odmeraného uhla

$$\bar{m}_\omega = \frac{\bar{m}_{\omega'}}{\sqrt{2}} = \bar{m}_\psi$$

má tú istú strednú chybu a váhu ako jednoduché meranie smerov.

V dôsledku toho sa dá určiť závislosť priečnej chyby  $dp$  na konci úsečky dĺžky  $s$  na chybe v meraní smerov  $d\psi^c$

$$dp = s \operatorname{tg} d\psi \approx s \psi^{cc} / \rho^{cc}. \quad (1.3)$$

Napr. pri možnosti merať smery s presnosťou  $5''$  a požiadavke, aby bola priečna chyba na konci merania dĺžky menšia ako 2 cm, je možné merať v trigonometrickej sieti s maximálnymi dĺžkami 2,5 km, t.j.  $2,5 \text{ km} \cdot \text{tg } 0,0005'' = 2,0 \text{ cm}$  (1. trieda presnosti merania).

**Nepresnosti pri meraní smerov** majú svoj pôvod v celom rade chýb spôsobených prístrojom, osobnými vlastnosťami merača a atmosférou. Mnohé z nich odstraňujeme korekciami, niektoré sa však nedajú úplne odstrániť a ovplyvňujú výsledok merania.

Aby boli meračské výsledky kvalitné, je potrebné sa riadiť niektorými **zásadami**. Meranie sa má robiť za stabilných poveternostných podmienok, pri dobrej viditeľnosti, cieľové značky (signály) môžu len mierne vibrovať. Najvhodnejšie obdobia na merania sú dve: 1-2 hodiny po východe a 1-2 hodiny pred západom Slnka. Najlepšie výsledky je možné očakávať za chladného počasia pri zatiahnutej oblohe, miernom vetre a pri zámerách, ktoré sa nepribližujú k zemskému povrchu viac než na 2 m. Veľmi dôležitá je **rýchlosť** merania. Požaduje sa, aby merač neprekročil dobu 1 minúty na meranie jedného smeru v skupine (t. zn. zamerať 5 smerov v 3 skupinách za 15 minút). Ak sa vyskytne v priebehu merania akákoľvek prekážka, ktorá poruší rovnomernosť časového sledu úkonov, je nutné meranie prerušiť a opakovať. Geodet V. J. STRUVE kedysi napísal, že v geodézii rovnako ako aj v astronómii platí zásada, že vysoká presnosť sa nedosiahne veľkým počtom menej presných meraní, ale skôr malým počtom meraní urobených i v detailoch **rýchlo a presne**. Táto zásada zvyšuje kvalitu merania a šetrí čas.

## 1.1 Osnova smerov meraná v skupinách

Pri budovaní lokálnych sietí sa používa hlavne metóda merania smerov v skupinách. Osnova smerov sa meria v dvoch radoch, líšiacich sa polohou ďalekohľadu, zmyslom otáčania alidády a limbu, prípadne mikrometrovým kladom.

Počet smerov tejto osnovy nemá prevýšiť počet 8 až 10. Prístroj sa zhorizontuje, scentruje a postaví do prvej polohy ďalekohľadu, pri ktorej je výškový kruh vľavo od okuláru ďalekohľadu. Čítanie na prvý smer (tzv. začiatok osnovy smerov) sa volí blízko nuly tak, aby čítanie bolo väčšie ako dopredu zistená kolimačná chyba prístroja. Pri meraní sa postupuje v smere číslovania limbu teodolitu. Odmeria sa prvý, druhý až  $n$ -tý smer osnovy. Posledným smerom osnovy je prvý, počiatkový smer. Súbor odmeraných hodnôt prvého až  $n$ -tého smeru určený v prvej polohe ďalekohľadu sa volá prvá rada. Na odmeranie nasledujúcej druhej rady sa pretočí ďalekohľad prístroja do druhej polohy (výškový kruh je vpravo a čítanie od okuláru ďalekohľadu na prvý smer je blízke  $200''$ ). Opačným postupom, t.j. proti smeru číslovania limbu sa odmeria  $n$ -tý,  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ ,... smer a meranie druhej rady sa znova ukončí čítaním na prvý smer osnovy. Obe rady tvorí celok, tzv. **prvú skupinu**.

Druhá skupina sa začína opäť meraním v prvej polohe a v zmysle číslovania limbu, avšak počiatkové čítanie prvého smeru sa nastaví na hodnotu  $\frac{200''}{s} + \frac{a}{s}$ , kde  $s$  je počet skupín,  $a$  je rozsah stupnice optického mikrometra (stupnicového mikroskopu). (Poznámka: Ak sa použije na zameranie lokálnej siete dvojsekundový teodolit, volí sa pre bežné práce  $s = 2$ , pre práce zvýšenej presnosti alebo pri použití menej presného teodolitu sa volí  $s \geq 3$ ). Ďalší postup v druhej skupine a v ostatných skupinách je podobný postupu merania v prvej skupine.

Pri prácach s vyššími nárokmi na presnosť merania smerov je potrebné dodržať nasledujúce zásady:

a) Je potrebné starostlivo zvoliť počiatkový smer. Musí byť ostro signalizovaný, dobre osvetlený, nesmie splývať s tmavým pozadím, počiatok nemá byť bodom zameriavanej lokálnej siete, môže byť i bodom o neznámych súradniciach (nemusí byť geodetickým bodom). Najlepšie spĺňa požiadavky počiatkového smeru vzdialený bod, ktorý sa premieta na severnej strane oproti obrazu oblohy. Je pochopiteľné, že takýchto bodov sa dá nájsť len malý počet.

b) Merač musí byť zacvičený tak, aby jednotlivé dielčie úkony robil **plynulo, v rovnakých časových intervaloch a dostatočne rýchlo**. Nie je možné pripustiť, aby v priebehu vlastného meračského úkonu len vyhľadal signály zameriavaných bodov. Meria sa v tieni, pod slnečníkom.

c) Body osnovy smerov majú byť zvolené tak, aby boli rovnomerne rozložené po horizonte a aby pri meraní nemuselo dochádzať k výraznému preostrovaniu ďalekohľadu, táto zásada má byť dodržaná hlavne pri presných prácach.

d) Odporúča sa pred meraním každej skupiny prekontrolovať a v prípade potreby opraviť centráciu a horizontáciu prístroja.

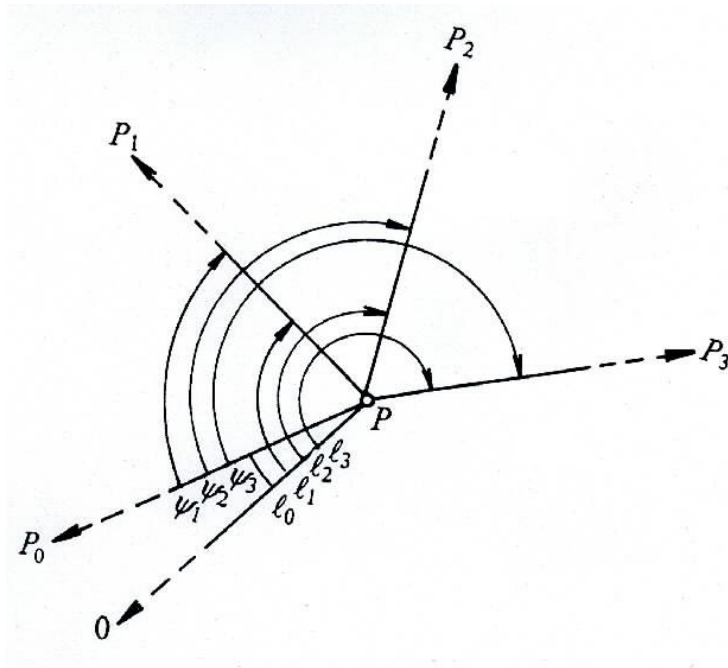
## 1.2 Vyrovnanie úplných skupín

Postup vyrovnania si ukážeme na jednoduchom príklade, vyznačenom na obr. 1.2.

Z bodu  $P$  boli odmerané smery na body  $P_0, P_1, P_2, P_3$  v troch skupinách. Na určenie vzájomnej polohy smerov stačí jedna skupina (jeden rad), ostatné pozorovania sú nadbytočné. Máme úlohu všetky merania vyrovnať tak, aby súčet štvorcov opráv jednotlivých odmeraných smerov bol minimálny. Ako neznáme máme tri uhly, ktoré vyjadrujú vzájomnú polohu štyroch smerov. Merané smery sú sprostredkujúcou veličinou. Preto pri vyrovnaní budeme postupovať podľa metódy vyrovnania sprostredkujúcich meraní. Pri vyrovnaní vychádzame zo všeobecného predpokladu, že určenia hodny meraných smerov.

Merané hodnoty – čítanie na kruhu – označme  $\ell_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) uhly označme podľa obr. 1.2  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Nula deleného kruhu nech leží v ľubovoľnom smere, napríklad v smere  $P_0$ . Zostavme tzv. určujúce rovnice. Medzi  $L_i$  a  $L_0$  (presné hodnoty) platia podľa obrázka tieto vzťahy

$$\begin{aligned}\psi_1 &= L_1 - L_0, \\ \psi_2 &= L_2 - L_0, \\ \psi_3 &= L_3 - L_0.\end{aligned}\tag{1.4}$$



Obr. 1.2. Osnova smerov

Namiesto presných hodnôt uhlov  $\Psi$  zavedieme vyrovnané uhly  $\psi$  a merané uhly  $\ell$  opravíme o opravy  $v$ , aby rovnice (1.4) boli splnené.

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \ell_1 + v_1 - (\ell_0 + v_0) , \\
\psi_2 &= \ell_2 + v_2 - (\ell_0 + v_0) , \\
\psi_3 &= \ell_3 + v_3 - (\ell_0 + v_0) .
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Hodnota pre nulový smer  $PP_0$  sa vyskytuje v každej rovnici. Označme ju ako ďalšiu neznámu  $z$

$$z = \ell_0 + v_0 . \tag{1.6}$$

Redukciou priemeru skupiny pri vystredení zápisníka docielime tak,  $\ell_0 = 0,0^g$ .

Pre jednotlivé merania dostaneme potom rovnice opráv

$$\begin{aligned}
v_0 &= z - \ell_0 , \\
v_1 &= z + \psi_1 - \ell_1 , \\
v_2 &= z + \psi_2 - \ell_2 , \\
v_3 &= z + \psi_3 - \ell_3 .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Toto platí pre prvú skupinu. Pre druhú skupinu dostaneme ďalšie štyri rovnice, v ktorých budú rovnaké neznáme  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , avšak  $z$  bude iné, lebo poloha kruhu bola pri meraní v druhej skupine pozmenená. Podobne pre tretiu skupinu máme štyri rovnice s ďalšou neznámou  $z$ . Spolu 12 rovníc so 6 neznámymi. Aby sme mohli rozlíšiť jednotlivé veličiny, označme ich podľa skupín označených I, II, III indexom 1, 2, 3. Potom môžeme zostaviť pre všetky skupiny tento systém rovníc opráv:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} v_0 &= z_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \ell_0^I \\ v_1 &= z_1 \quad . \quad . \quad + \psi_1 \quad . \quad . \quad - \ell_1^I \\ v_2 &= z_1 \quad . \quad . \quad . \quad + \psi_2 \quad . \quad - \ell_2^I \\ v_3 &= z_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \psi_3 \quad - \ell_3^I \end{aligned} \right\} \text{1. skupina} \\
& \left. \begin{aligned} v_4 &= . \quad z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \ell_0^{II} \\ v_5 &= . \quad z_2 \quad . \quad + \psi_1 \quad . \quad . \quad - \ell_1^{II} \\ v_6 &= . \quad z_2 \quad . \quad . \quad + \psi_2 \quad . \quad - \ell_2^{II} \\ v_7 &= . \quad z_2 \quad . \quad . \quad . \quad + \psi_3 \quad - \ell_3^{II} \end{aligned} \right\} \text{2. skupina} \\
& \left. \begin{aligned} v_8 &= . \quad . \quad z_3 \quad . \quad . \quad . \quad - \ell_0^{III} \\ v_9 &= . \quad . \quad z_3 \quad + \psi_1 \quad . \quad . \quad - \ell_1^{III} \\ v_{10} &= . \quad . \quad z_3 \quad . \quad + \psi_2 \quad . \quad - \ell_2^{III} \\ v_{11} &= . \quad . \quad z_3 \quad . \quad . \quad + \psi_3 \quad - \ell_3^{III} \end{aligned} \right\} \text{3. skupina} .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Rovnice opráv môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{v}_{(n,s,1)} = \mathbf{A}_{(n,s,n+s-1)} \mathbf{x}_{(s+n-1,1)} + \boldsymbol{\ell}_{(n,s,1)}, \tag{1.9}$$

kde  $n (= 4)$  je počet smerov,

$s (= 3)$  je počet skupín.

Matica  $\mathbf{A}$  a vektory  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\ell}$  majú členy

$$\mathbf{A}_{(n.s,n+s-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(s+n-1,1)} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}_{(n.s,1)} = \begin{vmatrix} -\ell_0^I \\ -\ell_1^I \\ -\ell_2^I \\ -\ell_3^I \\ -\ell_0^{II} \\ -\ell_1^{II} \\ -\ell_2^{II} \\ -\ell_3^{II} \\ -\ell_0^{III} \\ -\ell_1^{III} \\ -\ell_2^{III} \\ -\ell_3^{III} \end{vmatrix}.$$

Funkciu vyrovnania metódou najmenších štvorcov (MNS) formulujeme vzt'ahom

$$\sum P_v^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad (1.10)$$

Váhy položíme = 1 na diagonále matice  $\mathbf{P}$ . Funkcia vyrovnania MNS má tvar

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \boldsymbol{\ell}^T)(\mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}). \quad (1.11)$$

Vektor neznámych  $\mathbf{x}$  dostaneme deriváciou funkcie  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  podľa premennej  $\mathbf{x}$ , ktorú položíme rovnú nule

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (1.12)$$

Rovnicu zapíšeme a predelíme dvoma

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) 2\mathbf{v} = \mathbf{A}^T 2\mathbf{v} = 0, \quad / 2. \quad (1.13)$$

Po dosadení rovnice opráv (1.9) do rovnice (1.13) a po úprave dostaneme

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) = 0. \quad (1.14)$$

Normálne rovnice v maticovom tvare

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = \mathbf{N} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = 0 \quad (1.15)$$

a vektor neznámych je

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell}. \quad (1.16)$$

Transponovaná matica  $\mathbf{A}^T$  má tvar

$$\mathbf{A}_{(n+s-1,n.s)}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Výsledkom súčinu matic  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  sú koeficienty normálnych rovníc

$$\mathbf{A}_{(6,12)}^T \mathbf{A}_{(12,6)} = \mathbf{N}_{(6,6)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Na príklade si ukážeme princíp násobenia matic

$a_{11}$	$a_{12}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$c_{31}$	$c_{22}$	$c_{23}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$
		$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$
		$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$\vdots$

Členy matic v rovnici (1.15) sú

$$\mathbf{N} \mathbf{x} = \begin{vmatrix} 4z_1 & 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ 0 & 4z_2 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ 0 & 0 & 4z_3 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 3\psi_1 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 3\psi_1 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 3\psi_1 \end{vmatrix}, \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = \begin{vmatrix} -\sum \ell^I \\ -\sum \ell^{II} \\ -\sum \ell^{III} \\ -\sum \ell_1 \\ -\sum \ell_2 \\ -\sum \ell_3 \end{vmatrix}.$$

Normálne rovnice (1.15) majú tvar

$$\begin{aligned} 4z_1 & \cdot & \cdot & + \psi_1 & + \psi_2 & + \psi_3 & - \sum \ell^I & = 0, \\ \cdot & 4z_2 & \cdot & + \psi_1 & + \psi_2 & + \psi_3 & - \sum \ell^{II} & = 0, \\ \cdot & \cdot & 4z_3 & + \psi_1 & + \psi_2 & + \psi_3 & - \sum \ell^{III} & = 0, \\ z_1 & + z_2 & + z_3 & + 3\psi_1 & \cdot & \cdot & - \sum \ell_1 & = 0, \\ z_1 & + z_2 & + z_3 & \cdot & + 3\psi_2 & \cdot & - \sum \ell_2 & = 0, \\ z_1 & + z_2 & + z_3 & \cdot & \cdot & + 3\psi_3 & - \sum \ell_3 & = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Symbol  $\sum \ell^I$  znamená súčet všetkých  $\ell^I$  v prvej skupine,  $\sum \ell^{II}$  znamená súčet všetkých  $\ell^{II}$  v druhej skupine a pod. Symbol  $\sum \ell_1$  znamená súčet smerov  $\ell_1$  v I. až III. skupine.

Z prvých troch rovníc určíme neznáme  $z$

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \sum \ell^I), \\
z_2 &= -\frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \sum \ell^{II}), \\
z_3 &= -\frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \sum \ell^{III}).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Z toho po spočítaní rovníc dostaneme

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{3}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \frac{3}{4} \sum \ell. \tag{1.19}$$

Položili sme  $3\sum \ell = \sum \ell^I + \sum \ell^{II} + \sum \ell^{III}$  (spočítané hodnoty  $\ell$  po stĺpcoch v rovniciach (1.8).

Ak rovnicu (1.19) dosadíme do druhých troch rovníc (1.17), dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(3 - \frac{3}{4}\right)\psi_1 - \frac{3}{4}\psi_2 - \frac{3}{4}\psi_3 - \left(\sum \ell_1 - \frac{3}{4}\sum \ell\right) &= 0, \\
-\frac{3}{4}\psi_1 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)\psi_2 - \frac{3}{4}\psi_3 - \left(\sum \ell_2 - \frac{3}{4}\sum \ell\right) &= 0, \\
-\frac{3}{4}\psi_1 - \frac{3}{4}\psi_2 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)\psi_3 - \left(\sum \ell_3 - \frac{3}{4}\sum \ell\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Keď položíme  $3\sum \ell = \sum \ell_1 + \sum \ell_2 + \sum \ell_3$  (spočítané hodnoty smerov v riadkoch), po spočítaní rovníc (1.20) a úprave bude

$$\frac{3}{4}\psi_1 + \frac{3}{4}\psi_2 + \frac{3}{4}\psi_3 - \frac{3}{4}\sum \ell = 0. \tag{1.21}$$

Použili sme úpravu  $\psi_1\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\psi_1$  a pod.

Pripočítajme rovnicu (1.21) postupne k prvej, druhej a tretej rovnici (1.20) a dostaneme neznáme  $\psi$

$$\begin{aligned}
3\psi_1 - \sum \ell_1 &= 0, \quad \text{z toho } \psi_1 = \frac{\sum \ell_1}{3}, \\
3\psi_2 - \sum \ell_2 &= 0 \quad \psi_2 = \frac{\sum \ell_2}{3}, \\
3\psi_3 - \sum \ell_3 &= 0 \quad \psi_3 = \frac{\sum \ell_3}{3}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Podľa vpredu uvedeného označenia  $\sum \ell_1$  znamená súčet všetkých meraní v I. až III. Skupine pre prvý smer, rovnako  $\sum \ell_2$  a  $\sum \ell_3$  je súčet všetkých meraní pre druhý a tretí smer. Nakoľko máme tri skupiny, máme aj tri hodnoty pre  $\ell_1$ , tri hodnoty pre  $\ell_2$  .. atď.

Rovnice (1.22) podľa toho vyjadrujú, že vyrovnanú hodnotu jedného smeru, ktorého vzájomná poloha vzhľadom na ostatné smery je určená uhlovými hodnotami  $\ell_i$ , dostaneme vystredením všetkých meraní prislúchajúcich tomuto smeru. Tento poznatok možno rozšíriť na  $n$  smerov.

Všimnime si, akú vlastnosť majú opravy  $v$ . Pre prvú skupinu máme podľa rovnice (1.5)

$$\begin{aligned}
v_1 &= \psi_1 + z_1 - \ell_1, \\
v_2 &= \psi_2 + z_1 - \ell_2, \\
v_3 &= \psi_3 + z_1 - \ell_3, \\
\hline
\sum v^I &= \sum \psi + 3z_1 - \sum \ell^I.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Z toho po dosadení  $z_1 = -\frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \sum \ell^I)$  z rovnice (1.18) je

$$\begin{aligned}
\sum v^I &= \sum \psi + 3\left(-\frac{1}{4}(\sum \psi - \sum \ell^I)\right) - \sum \ell^I = \sum \psi - \frac{3}{4}\sum \psi + \frac{3}{4}\sum \ell^I - \sum \ell^I, \\
\sum v^I &= \frac{1}{4}(\sum \psi - \sum \ell^I).
\end{aligned}$$

Podobne pre druhú a tretiu rovnicu bude

$$\begin{aligned}
\sum v^{II} &= \frac{1}{4}(\sum \psi - \sum \ell^{II}), \\
\sum v^{III} &= \frac{1}{4}(\sum \psi - \sum \ell^{III}).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Rovnice (1.22) spočítame

$$\sum \psi = \frac{1}{3}(\sum \ell_1 + \sum \ell_2 + \sum \ell_3).$$

Vpredu sme si už ukázali, že

$$3\sum \psi = \sum \ell_1 + \sum \ell_2 + \sum \ell_3 = \sum \ell^I + \sum \ell^{II} + \sum \ell^{III} = 3\sum \ell, \text{ potom bude}$$

$$\sum \psi = \frac{1}{3}(3\sum \ell) = \sum \ell.$$

Rovnice (1.24) spočítame a po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum v &= \frac{3}{4}\sum \psi - \frac{1}{4}(\sum \ell^I + \sum \ell^{II} + \sum \ell^{III}) = \frac{3}{4}\sum \psi - \frac{3}{4}\sum \ell, \\
\sum v &= \frac{3}{4}\sum \psi - \frac{3}{4}\sum \psi. \\
\sum v &= 0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Vidíme, že súčet všetkých opráv  $v$  po vyrovnaní sa rovná nule. K tomuto poznatku by sme došli aj z podmienky minima. Prvá derivácia výrazu  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min.$  podľa premenných musí sa rovnať nule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\partial x} &= 2\sum v = 0, \\
\sum v &= 0.
\end{aligned}$$

Pri praktickom riešení vyrovnanie smerov vystredíme všetky smery podľa rovnice (1.22) a potom jednotlivé skupiny pootočime tak, aby súčet opráv  $\sum v$  sa v každej skupiny prakticky rovnal nule.

Zistíme to tak, že zo spočítaných rovníc (1.23) v 1. skupine vypočítame stočenie

$$z_1 = -\frac{\sum \psi - \sum \ell^I}{n}, \text{ kde } n \text{ je počet smerov, ktoré dosadíme naspäť do rovnice (1.23). Vtedy už}$$

vyčíslené opravy spĺňajú podmienku  $\sum v^I = 0$ . Podobne postupujeme aj v 2. a 3. skupine. Z opráv  $v$  vypočítame strednú chybu meraného smeru v jednej skupine  $m_0$  (jednotkovú strednú chybu aposteriornu, ktorú označujeme tiež  $\sigma_0$ ) a strednú chybu vyrovnaného smeru v  $s$  skupinách  $m$ .

**Príklad 1.1.** Výpočet strednej chyby smeru meraného v jednej skupine  $m_0$  a strednej chyby vyrovnaného smeru

Tabuľka č. 1.1

Č. b.	Rad	1.skupina	Priemer	2. skupina	Priemer	3.skupina	Priemer	Priemer z 3 sk. $\bar{\psi}$
			Redukcia		Redukcia		Redukcia	
504	I	0,0002	0001 <sub>5</sub>	64,9999	0003	130,0002	9996 <sub>5</sub>	0,0000 <sub>0</sub>
	II	200,0001	0000	265,0007	0000	329,9991	0000	
501	I	62,0153	0149 <sub>0</sub>	127,0149	0138 <sub>5</sub>	192,0148	0139 <sub>5</sub>	62,0142 <sub>0</sub>
	II	262,0145	0147 <sub>5</sub>	327,0128	0135 <sub>5</sub>	292,0131	0143 <sub>0</sub>	
503	I	318,2120	2113 <sub>0</sub>	383,2111	2108	48,2100	2105 <sub>5</sub>	318,2108 <sub>5</sub>
	II	118,2106	2111 <sub>5</sub>	183,2105	2105	248,2111	2109 <sub>0</sub>	
505	I	397,9109	9108 <sub>0</sub>	62,9103	9105 <sub>5</sub>	127,9104	9103 <sub>5</sub>	397,9105 <sub>3</sub>
	II	197,9107	9106 <sub>5</sub>	262,9108	9102 <sub>5</sub>	327,9103	9107 <sub>0</sub>	
504	I	0,0015	0011 <sub>5</sub>	64,9996	9998	129,9999	9999	0,0002 <sub>5</sub>
	II	200,0008	0010 <sub>0</sub>	265,0000	9995	329,9999	0002 <sub>5</sub>	

Výpočet stredných chýb

Tabuľka 1.2

Č. b.	1. skupina		2. skupina		3. skupina	
	$\delta = \bar{\psi} - \psi_i$	$v = \delta - \frac{\delta}{n}$	$\delta = \bar{\psi} - \psi_i$	$v$	$\delta = \bar{\psi} - \psi_i$	$v$
504	-		-		-	
501	-5,5	-1,2	+6,5	+1,4	-1,0	-0,2
503	-3,0	+1,3	+3,5	-1,6	-0,5	+0,3
505	-1,2	+3,1	+2,8	-2,3	-1,7	-0,9
504	-7,5	-3,2	+7,5	+2,4	0,0	+0,8
	$\sum \delta^I / n$ = -4,3	$\sum v^I$ = +0,0	$\sum \delta^{II} / n$ = +5,1	$\sum v^{II}$ = -0,1	$\sum \delta^{III} / n$ = +0,8	$\sum v^{III}$ = 0

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{(n-1)(s-1)}} = \sqrt{\frac{40.13}{3.2}} = 2,6^{cc},$$

$$m_s = \frac{m_0}{\sqrt{s}} = \frac{2.6^{cc}}{\sqrt{3}} = 1,5^{cc}.$$

Č. b.	1. skupina $\bar{\psi}_1 + \frac{\sum \delta^I}{n}$	2. skupina $\bar{\psi}_2 + \frac{\sum \delta^{II}}{n}$	3. skupina $\bar{\psi}_3 + \frac{\sum \delta^{III}}{n}$	Priemer $\bar{\psi}'$	$\delta'^I =$ $\bar{\psi}' - 1.$	$\delta'^{II} =$ $\bar{\psi}' - 2.$	$\delta'^{III} =$ $\bar{\psi}' - 3.$	$\sum \delta'$
504	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	-	-	-
501	62,0143 <sub>2</sub>	127,0140 <sub>6</sub>	192,0143 <sub>8</sub>	62,0142 <sub>5</sub>	-0,7	+1,9	-1,3	0
503	318,2107 <sub>2</sub>	283,2110 <sub>1</sub>	48,2109 <sub>8</sub>	318,2109 <sub>0</sub>	+1,8	-1,1	-0,8	-0,1
505	397,9102 <sub>2</sub>	62,9107 <sub>6</sub>	127,9107 <sub>8</sub>	397,9105 <sub>9</sub>	+3,7	-1,7	-1,9	-0,1
504	0,0005 <sub>7</sub>	0,0000 <sub>1</sub>	0,0003 <sub>2</sub>	0,0003 <sub>0</sub>	-2,7	+2,9	-0,2	0

V príklade 1.1 sme si ukázali, že vystredené hodnoty smerov sa pootočením prakticky nezmenili.

### 1.3 Stredné chyby

Strednú chybu jedného smeru meraného v jednej skupine (pre jednotkovú váhu) vypočítame zo vzťahu

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{N - \nu}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N - \nu}}, \quad (1.26)$$

kde  $N - \nu$  je počet nadbytočných meraní. Ak máme  $s$  skupín a v každej máme  $n$  smerov, potom počet všetkých  $N$  je  $n \cdot s$ . Neznáme sú  $n - 1$  uhlov a okrem toho v každej skupine je neznáma orientačná veličina  $z$ , spolu  $s + n - 1$ . Potom

$$N - \nu = n s - s - (n - 1) = s(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(s - 1). \quad (1.27)$$

Za váhu jedného smeru sme položili 1. Potom váha vyrovnaného smeru z  $s$  skupín bude  $p = s$  a jeho stredná chyba bude

$$m = \pm \frac{m_0}{\sqrt{s}}. \quad (1.28)$$

### 1.4 Výpočet hodnoty $\sum v^2$

Rozdiely  $\delta_i$  medzi priemerom skupín  $\bar{\psi}$  a vystredenými hodnotami v skupine  $\psi_i$

$$\delta_i = \bar{\psi}_s - \psi_i, \quad (1.29)$$

nie sú opravy podľa definície vyrovnávacieho počtu, lebo  $i$  v prvom smere, na ktorý je každá skupina orientovaná, môže byť chyba. Preto pre jednotlivé smery skutočné opravy sú

$$v_i = \delta_i + c, \quad (1.30)$$

kde  $c$  znamená chybu v prvom smere. Spočítaním všetkých  $v_i$  pre  $n$  smerov dostaneme:

$$\sum v = \sum \delta + nc \quad (1.31)$$

o opravách  $v$ , ako o odchýlkach od aritmetického priemeru, platí

$$\sum v = 0.$$

Potom z rovnice (1.31) dostaneme

$$c = -\frac{\sum \delta}{n} \quad (1.32)$$

a jednotlivé opravy z rovníc (1.30) budú

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_1 - \frac{\sum \delta}{n}, \\ v_2 &= \delta_2 - \frac{\sum \delta}{n}, \\ &\vdots \\ v_n &= \delta_n - \frac{\sum \delta}{n}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

-----

$$\text{Kontrola} \quad \sum v = \sum \delta - n \frac{\sum \delta}{n} = 0.$$

$\sum vv$  vypočítame z rovníc (1.33).

Ak sa chceme vyhnúť výpočtu jednotlivých opráv  $v$ , môžeme súčet  $\sum v^2$  vypočítať z rovnice (1.31). Pre prvú skupinu bude

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_1 + c, \\ v_2 &= \delta_2 + c, \\ &\vdots \\ v_n &= \delta_n + c, \\ \sum vv_1 &= \sum \delta \delta_1 + 2 \sum \delta_1 c + n \sum cc \end{aligned} \quad (1.34)$$

a z toho, vzhľadom na rovnicu (1.32) máme

$$\begin{aligned} \sum v^2 &= \sum \delta^2 - 2 \frac{(\sum \delta)^2}{n} + \frac{(\sum \delta)^2}{n}, \\ \sum v^2 &= \sum \delta^2 - \frac{1}{n} (\sum \delta)^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Podobne by sme odvodili výraz  $\sum v^2$  pre ďalšie skupiny. Potom hľadaný súčet pre všetky skupiny bude

$$\sum v^2 = \sum vv_1 + \sum vv_2 + \dots + \sum vv_s. \quad (1.36)$$

## 1.5 Vyrovnávanie neúplných skupín

Pre geodetické práce, u ktorých nie sú kladené vysoké požiadavky na presnosť, niekedy využívame aj neúplnú osnovu smerov. V neúplnej osnove smerov z rôznych dôvodov nebolo možné odmerať všetky smery v niektorej zo skupín. Pre nemerané smery nemôžeme zostaviť rovnicu opráv.

Neúplnú osnovu smerov je možné vyrovnať zostavením rovníc opráv (1.8), avšak matica  $\mathbf{A}$  v rovnici (1.9) nebude mať pravidelný tvar. Vektor neznámych vypočítame z rovnice (1.16). Pri praktickom riešení vyrovnáme hľadané uhly približnou metódou vyrovnania.

Majme  $n$  smerov, ktoré sú odmerané v  $s$  skupinách. Smery v I. skupine označme  $\ell_0^I, \ell_1^I, \ell_2^I, \dots, \ell_n^I$  v II. skupine  $\ell_0^{II}, \ell_1^{II}, \ell_2^{II}, \dots, \ell_n^{II}$  atď. Vystredení zápisníka dostaneme pre 1. smer v každej skupine  $\ell_0 = 0$ . Podľa rovníc (1.22), pri zohľadnení počtu meraných skupín, pre každý smer vypočítame vyrovnanú hodnotu smeru  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Rozdiel medzi vyrovnaným smerom a meraným smerom označme  $\delta$  (napr.  $\delta_1^I = \psi_1 - \ell_1^I$ ). Pre jednotlivé smery môžeme napísať vzťahy

$$\begin{aligned} \ell_1^I + \delta_1^I, \quad \ell_1^{II} + \delta_1^{II}, \quad \dots, \quad \ell_1^s + \delta_1^s, \quad \sum \delta_1 &= 0, \\ \ell_2^I + \delta_2^I, \quad \ell_2^{II} + \delta_2^{II}, \quad \dots, \quad \ell_2^s + \delta_2^s, \quad \sum \delta_2 &= 0, \\ \vdots \\ \ell_n^I + \delta_n^I, \quad \ell_n^{II} + \delta_n^{II}, \quad \dots, \quad \ell_n^s + \delta_n^s, \quad \sum \delta_n &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Súčet  $\sum \delta_i$  ako súčet odchýlok od aritmetického priemeru pri jednom smere (v riadkoch) sa bude rovnať nule.

Po oprave smerov o hodnoty  $\delta$ , nebudú smery vyrovnané, pretože  $\delta$  rozdiely nie sú opravy, o ktorých má v zmysle vyrovnávacieho počtu platiť  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$ . Jednotlivé skupiny musíme pootočiť o chybu  $c$  v orientácii každej skupiny

$$v = \delta + c. \quad (1.38)$$

Rozdiely  $\delta_i$  v I. až  $s$ -tej skupine spočítame a dostaneme

$$\sum \delta^I = u_1, \sum \delta^{II} = u_2, \dots, \quad \sum \delta^s = u_s \quad \sum \sum \delta_i = 0. \quad (1.39)$$

Hľadané pootočenie skupiny pri  $n$  smeroch je  $\frac{u}{n}$ . Pretože počet smerov v skupinách je rôzny, budú jednotlivé orientačné opravy

$$c_1 = \frac{u_1}{p}, \quad c_2 = \frac{u_2}{q}, \quad c_3 = \frac{u_3}{r}, \dots \quad (1.40)$$

pričom  $p, q, r \dots$  je počet smerov v príslušnej skupine osnovy smerov. Skupine s väčším počtom meraných smerov sa prisúdi podiel menšej opravy, s menším počtom meraných smerov podiel väčšej opravy. V hodnote  $c_i$  orientácie skupiny, je tým zahrnutá i rôzna váha, zohľadnená počtom smerov v príslušnej skupine

O hodnotu  $c_i$  pootočíme príslušnú skupinu. Opravené smery budú

$$\begin{aligned} \ell_1^I + c_1, \quad \ell_1^{II} + c_2, \quad \dots, \quad \ell_1^s + c_s, \\ \ell_2^I + c_1, \quad \ell_2^{II} + c_2, \quad \dots, \quad \ell_2^s + c_s, \\ \vdots \\ \ell_n^I + c_1, \quad \ell_n^{II} + c_n, \quad \dots, \quad \ell_n^s + c_s, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Z takto opraveného systému smerov vypočítame podľa rovníc (1.22) vyrovnané smery  $\psi_1^1, \psi_2^1, \dots, \psi_n^1$  v 1. stupni vyrovnania. Z opravených smerov (1.41) a vyrovnaných smerov  $\psi_i^1$

vypočítame rozdiely  $\delta_i^1$  a odchýlky  $u_i^1$  (1.39). Z odchýlok  $u_i^1$  vypočítame opravy  $c_1^1, c_2^1 \dots c_n^1$ . Smery opravíme a vypočítame vyrovnané smery  $\psi_1^2, \psi_2^2, \dots, \psi_n^2$ , čím dostaneme 2. stupeň vyrovňania. V príklade 2 si všimneme, že vyrovnané smery  $\psi_i$ ,  $\psi_i^1$  a  $\psi_i^2$  sa navzájom len veľmi málo menia, ale súčet  $\sum \delta^2$  klesá a blíži sa k minimu, t.j. k  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ . Pri praktickom vyrovnaní neúplnej osnovy smerov končíme s prvým, prípadne druhým stupňom vyrovňania.

**Príklad 2.** Vyrovnanie neúplných skupín

Tabuľka č. 1.4

Č.	I. skupina	II. skupina	III.skupina	IV.skupina	V. skupina	Súčet	Priemer
b.	$\ell_i^I$	$\ell_i^{II}$	$\ell_i^{III}$	$\ell_i^{IV}$	$\ell_i^V$	$\Sigma$	$\psi_i$
506	0,0000 <sub>0</sub>	0,0000 <sub>0</sub>	0,0000 <sub>0</sub>	0,0000 <sub>0</sub>	0,0000 <sub>0</sub>	0	0,0000
503	313,6636 <sub>6</sub>	-	6636 <sub>5</sub>	6634 <sub>7</sub>	,6636 <sub>7</sub>	144,5	313,6636 <sub>1</sub>
505	393,3639 <sub>7</sub>	3641 <sub>8</sub>	3636 <sub>8</sub>	3630 <sub>4</sub>	-	148,7	393,3637 <sub>2</sub>
504	395,4515 <sub>3</sub>	4525 <sub>6</sub>	-	4519 <sub>7</sub>	,4514 <sub>7</sub>	75,3	395,4518 <sub>8</sub>
506	0,0003 <sub>7</sub>	0003 <sub>2</sub>	-0001 <sub>9</sub>	0006 <sub>1</sub>	-,0002 <sub>0</sub>	9,1	0,0001 <sub>8</sub>
$\Sigma$	95,3	70,6	71,4	90,9	49,4	377,6	93,9

Tabuľka č. 1.5

Č. b.	Rozdiely $\psi_i - \ell_i = \delta_i$					$\sum \delta$	$\sum \delta^2 =$ 204,8 <sub>9</sub>
	[cc]						
506	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
503	-0,5	-	-0,4	+1,4	-0,6	-0,1	
505	-2,5	-4,6	+0,4	+6,8	-	+0,1	
504	+3,5	-6,8	-	-0,9	+4,1	-0,1	
506	-1,9	-1,4	+3,7	-4,3	+3,8	+0,1	
$u_i$	-1,4	-12,8	+3,7	+3,0	+7,3	0,0	
$c_i$	-0,3	-3,2	+0,9	+0,6	+1,8	$\sum \sum \delta = -0,2$	

Tabuľka č. 1.6

Opravené smery $\ell_i^1 = \ell_i + c_i$						$\Sigma$	Priemer
$\ell_i^1$	$\ell_i^1 + c_1$	$\ell_i^{II} + c_2$	$\ell_i^{III} + c_3$	$\ell_i^{IV} + c_4$	$\ell_i^V + c_5$		$\psi_i^1$
506	-0,0000 <sub>3</sub>	-0,0003 <sub>2</sub>	+0,0000 <sub>9</sub>	+0,0000 <sub>6</sub>	+0,0001 <sub>8</sub>	-0,2	0,0000 <sub>0</sub>
503	313,6636 <sub>3</sub>	-	6637 <sub>4</sub>	6635 <sub>3</sub>	6638 <sub>5</sub>	147,5	313,6636 <sub>9</sub>
505	393,3639 <sub>4</sub>	3638 <sub>6</sub>	3637 <sub>7</sub>	3631 <sub>0</sub>	-	146,7	393,3636 <sub>7</sub>
504	395,4515 <sub>0</sub>	4522 <sub>3</sub>	-	4520 <sub>3</sub>	4516 <sub>5</sub>	74,1	395,4518 <sub>5</sub>
506	0,0003 <sub>4</sub>	-0,0000 <sub>0</sub>	-0,0001 <sub>0</sub>	-0,0006 <sub>7</sub>	-0,0000 <sub>2</sub>	8,9	0,0001 <sub>8</sub>
$\Sigma$	93,8	57,7	75,0	93,9	56,6	377,0	93,9

Tabuľka č. 1.7

Č. b.	Rozdiely $\psi_i^1 - \ell_i^1 = \delta_i^1$					$\Sigma \delta^1$	$(\Sigma \delta^2)^1$ =140,56
	[cc]						
506	+0,1	+3,0	-1,1	-0,8	-2,0	-0,8	
503	+0,6	-	-0,5	+1,6	-1,6	+0,1	
505	-2,7	-1,9	-1,0	+5,7	-	+0,1	
504	+3,5	-3,8	-	-1,8	+2,0	-0,1	
506	-1,6	+1,8	+2,8	-4,9	+2,0	+0,1	
$u_i^1$	-0,1	-1,0	+0,2	+0,2	+0,4	+0,6	
$c_i^1$	0,0	-0,25	+0,05	+0,05	0,1	-0,12	

Tabuľka č. 1.8

Opravené smery $\ell_i^1 = \ell_i + c_i$						$\Sigma$	Priemer
$\ell_i^2$	$\ell_i^1 + c_1^1$	$\ell_i^{\text{II}} + c_2^1$	$\ell_i^{\text{III}} + c_3^1$	$\ell_i^{\text{IV}} + c_4^1$	$\ell_i^{\text{V}} + c_5^1$		$\psi_i^1$
506	-0,0000 <sub>3</sub>	-0,0003 <sub>4</sub>	+0,0000 <sub>9</sub>	+0,0000 <sub>6</sub>	0,0001 <sub>9</sub>	-0,3	-0,0000 <sub>3</sub>
503	313,6636 <sub>3</sub>	-	6637 <sub>4</sub>	6635 <sub>3</sub>	6638 <sub>6</sub>	147,6	313,6636 <sub>9</sub>
505	393,3639 <sub>4</sub>	3638 <sub>4</sub>	3637 <sub>7</sub>	3631 <sub>0</sub>	-	146,5	393,3636 <sub>6</sub>
504	395,4515 <sub>0</sub>	4522 <sub>1</sub>	-	4520 <sub>3</sub>	4516 <sub>5</sub>	73,9	395,4518 <sub>5</sub>
506	0,0003 <sub>4</sub>	-0,0000 <sub>2</sub>	-0,0001 <sub>0</sub>	-0,0006 <sub>7</sub>	-0,0000 <sub>1</sub>	8,8	0,0001 <sub>8</sub>
$\Sigma$	93,8	56,9	75,0	93,9	56,9	376,5	93,5

Tabuľka č. 1.9

Č. b.	Rozdiely $\psi_i^2 - \ell_i^2 = \delta_i^2$					$\Sigma \delta^2$	$(\Sigma \delta^2)^2$ =140,88
	[cc]						
506	-0,0	+3,1	-1,2	-0,9	-2,2	-1,1	
503	+0,6	-	-0,5	+1,6	-1,7	0,0	
505	-2,8	-1,8	-1,1	+5,6	-	-0,1	
504	+3,5	-3,6	-	-1,8	+2,0	+0,1	
506	-1,6	+2,0	+2,8	-4,9	+1,9	+0,2	
$u_i^2$	-0,3	-0,3	0,0	-0,4	0,0	-0,9	
$c_i^2$	0,0 <sub>6</sub>	-0,0 <sub>6</sub>	0,0	-0,0 <sub>8</sub>	0,0	-0,1 <sub>8</sub>	

Výpočty je vhodné preskúšať. Chybné vyrovnanie znehodnotí odmerané hodnoty. Preskúšanie výpočtov v I. skupine bude

$$\sum \ell_i^1 - u_{i1} = \sum \bar{\psi}_i - \psi_i ,$$

$$95,3 - 1,4 = 93,9 - 0,0 = 93,9$$

a podobne ďalej

$$70,6 - 12,8 = 93,9 - 36,1 = 57,8 ,$$

$$71,4 + 3,7 = 93,9 - 18,8 = 75,1 ,$$

$$90,9 + 3,0 = 93,9 - 0,0 = 93,9 ,$$

$$49,4 + 7,3 = 93,9 - 37,2 = 56,7 .$$

Opravené smery si v 1. stupni vyrovnania overíme

$$\sum \ell_i^1 + 5.c^1 = \sum \ell_i^1 ,$$

$$95,3 - 1,5 = 93,8 ,$$

ďalej

$$70,6 - 12,8 = 57,7 ,$$

$$71,6 + 3,6 = 75,0 ,$$

atď.

Keď postupne porovnávame súčty štvorcov rozdielov  $\delta \quad \sum \delta^2 = 204,84, \quad \left(\sum \delta^2\right)^1 = 140,56,$   
 $\left(\sum \delta^2\right)^2 = 140,88$  hodnoty  $\left(\sum \delta^2\right)^1 \cong \left(\sum \delta^2\right)^2$ . Vyrovnanie je možné ukončiť už pri  
 1. stupni kedy môžeme prijať  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \sum \delta^2 = 140,56$ .

Stredná chyba jedného smeru podľa rovnice (1.26) je

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N - \nu}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{(25 - 3) - (5 - 1 + 5)}} = \sqrt{\frac{140,56}{22 - 9}} = 3,29^{cc} .$$

Stredné chyby vystredených smerov sú

$$m_{506} = \frac{m_0}{\sqrt{s}} = \frac{m_0}{\sqrt{5}} = 1,5^{cc} , \quad m_{503,504,505} = \frac{m_0}{\sqrt{4}} = 1,6^{cc} .$$