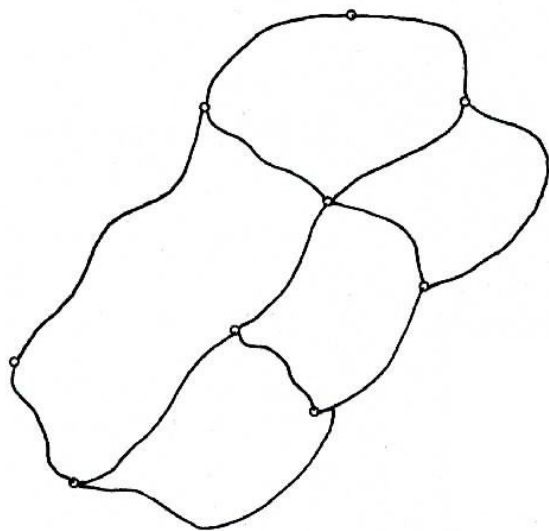


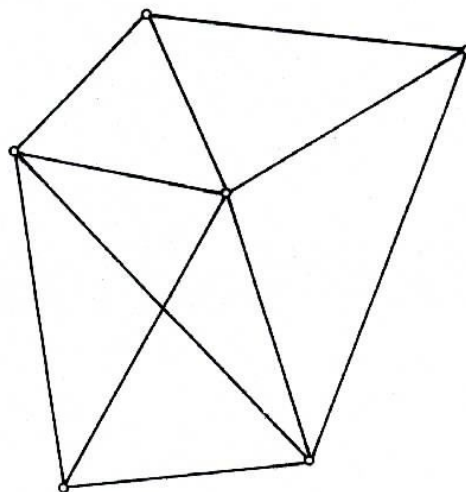
## 9. VÝŠKOVÉ SIETE

Výškovo určené body spájame do siete. Prevýšenia medzi bodmi meriame geometrickou niveláciou alebo trigonometricky. Výškové siete rozdeľujeme na

- nivelačné siete (obr. 9.1), v ktorých sú výškové body situačne spojené v tvare polygónov.
- trigonometrické výškové siete, v ktorých sú výškové body viacnásobne navzájom spojené odmeranými prevýšeniami (obr. 9.2).



Obr. 9.1. Nivelačná sieť



Obr. 9.2. Trigonometrická sieť výškových bodov

Z hľadiska vyrovnania je jedno akým spôsobom sú určené prevýšenia. Dôležité je ako sú body vzájomne spojené meraním.

Vzájomné spojenie výškových bodov ovplyvňuje počet normálnych rovníc pri vyrovnaní siete podľa metódy najmenších štvorcov. Výškovú sieť môžeme vyrovnávať podľa meraní podmienkových (závislých) alebo podľa meraní sprostredkujúcich. Ak

$$h < 2(n-1), \quad (9.1)$$

vyrovnávame podľa podmienkových meraní, ak

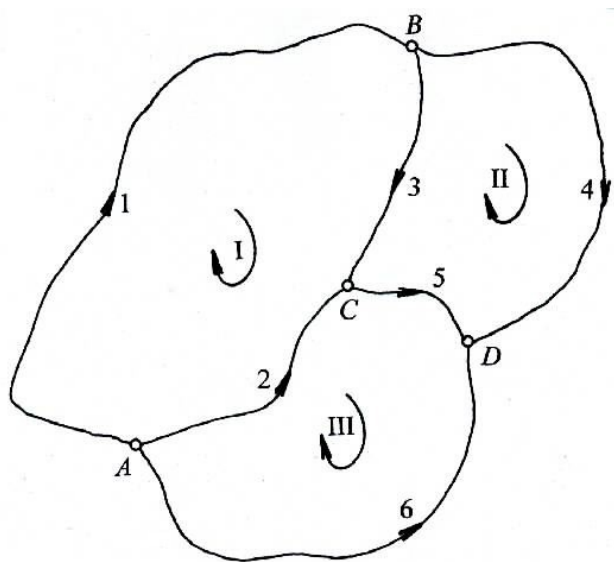
$$h \geq 2(n-1), \quad (9.2)$$

vyrovnávame podľa sprostredkujúcich meraní, kde  $h$  je počet odmeraných výškových rozdielov,  $n$  je počet výškových bodov.

Voľba postupu vyrovnania podľa (9.1) a (9.2) vedie k najmenšiemu počtu normálnych rovníc. Vyrovnanie podľa podmienkových meraní je podstatne jednoduchšie, najmä pri zostavovaní normálnych rovníc. Ak z vyrovnania chceme určiť aj stredné chyby výškových (uzlových) bodov, vyrovnáme výškovú sieť podľa sprostredkujúcich meraní, aj keby bolo časovo úspornejšie vyrovnávať sieť podľa podmienkových meraní.

### 9.1 Vyrovnanie výškovej siete podľa podmienkových meraní

Máme danú nivelačnú sieť vyznačenú na obr. 9.3, v ktorej je vzájomná poloha výškových bodov určená šiestimi odmeranými prevýšeniami. Body sú spojené do troch uzavretých nivelačných ťahov. Stúpanie prevýšení je naznačené smerom šípky.



Obr. 9.3. Vyrovnanie nivelačnej siete

Prvým krokom pri vyrovnaní je určenie počtu podmienkových rovníc. Ak merané výškové rozdiely označíme  $h$  (6) a počet výškových bodov označíme  $n$  (4), tak počet podmienok je

$$r = h - n + 1 = 3 \quad (9.3)$$

Počet podmienok sa rovná počtu nadbytočných meraní. Na určenie výšok  $n$  bodov potrebujeme  $n - 1$  výškových rozdielov  $h$ . Preto

$$h - (n - 1) = h - n + 1 = r$$

sa rovná počtu nadbytočných meraní. Počet podmienkových rovníc sa rovná počtu uzavretých nivelačných ťahov.

Za váhu volíme vzťah

$$p = \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{p} = s, \quad (9.4)$$

kde  $s$  je dĺžka nivelačného oddielu.

Podľa obr. 9.3 môžeme zostaviť po jednej podmienkovej rovnici pre každý z ťahov I až III a štvrtú podmienku pre obvodový ťah. Z týchto štyroch podmienkových rovníc sú tri nezávislé. Zvyčajne volíme podmienkové rovnice dané uzavretými ťahmi.

Odmerané výškové rozdiely ( $\ell$ ) musia v ľubovoľnom uzavretom ťahu splniť podmienku

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = 0. \quad (9.5)$$

Rovnica však v dôsledku meračských chýb nebude splnená. Úlohou je určiť ku každému odmeranému prevýšeniu  $\ell$  takú opravu  $v$ , aby

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min.$$

Má byť

$$(\ell_1 + v_1) + (\ell_2 + v_2) + \dots + (\ell_n + v_n) = 0. \quad (9.6)$$

Zavedieme znamienka. Rozhodneme sa pre určitý smer, obyčajne smer číslovania hodín, v ktorom budeme prechádzať ťahom pri zostavení podmienkovej rovnice. Stúpajúcim prevýšeniam (v smere šípky) prisúdime kladné znamienko, klesajúcim (proti smeru šípky) záporné znamienko. Vo všetkých ťahoch dodržíme jeden smer. Na obr. 9.3 je zvolený smer označený kruhovou šípkou okolo čísla nivelačného ťahu. Keďže sú podmienky navzájom nezávislé, môžeme ktorúkoľvek podmienku zostaviť aj tak, že postupujeme smerom opačným, t.j. napíšeme ju s opačnými znamienkami.

Podľa obr. 9.3 môžeme napísať podmienkové rovnice

$$\begin{aligned}\ell_1 + v_1 - \ell_2 - v_2 + \ell_3 + v_3 &= 0, \\ -\ell_3 - v_3 + \ell_4 + v_4 - \ell_5 - v_5 &= 0, \\ \ell_2 + v_2 + \ell_5 + v_5 - \ell_6 - v_6 &= 0,\end{aligned}\tag{9.7}$$

ktoré budú mať po pretvorení tvar

$$\begin{aligned}+v_1 - v_2 + v_3 + U_a &= 0, \\ -v_3 + v_4 - v_5 + U_b &= 0, \\ +v_2 + v_5 - v_6 + U_c &= 0,\end{aligned}\tag{9.8}$$

kde

$$\begin{aligned}U_a &= \ell_1 - \ell_2 + \ell_3, \\ U_b &= -\ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \\ U_c &= \ell_2 - \ell_5 - \ell_6.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Pretvorené podmienkové rovnice v maticovom zápise budú

$$\mathbf{A}_{(3,6)}^T \mathbf{v}_{(6,1)} + \mathbf{u}_{(3,1)} = 0,$$

kde

$$\mathbf{A}_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_6 \end{bmatrix}.$$

Opravy  $v_i$  vypočítame Lagrangeovým postupom, v ktorom k hlavnej podmienke  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  pripájame vedľajšiu podmienku vyjadrenú rovnicou (7.16) rozšírenú o Lagrangeové faktory – koreláty. Riešenie normálnych rovníc si overíme rovnicou

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = -\mathbf{u}^T \mathbf{k} = -\sum uk.\tag{9.10}$$

Vyrovnané hodnoty prevýšení vypočítame podľa rovnice

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{v}\tag{9.11}$$

Jednotkovú strednú chybu (strednú chybu pre  $p = 1$  (1 km)) určíme zo vzťahu

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}}.\tag{9.12}$$

Podľa kapitoly 5.5.2 publikácie Bitterer, L.: Vyrovnávací počet, vypočítame kovariančnú maticu vyrovnaných hodnôt vektora opráv

$$\mathbf{C}_{vv} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{vv} = \sigma_0^2 [\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1}]\tag{9.13}$$

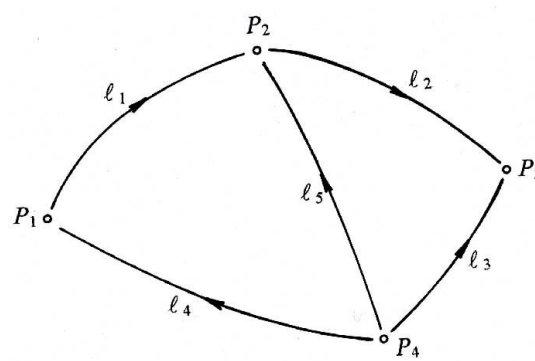
a kovariančnú maticu vyrovnaných prevýšení

$$\mathbf{C}_{LL} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{LL} = \sigma_0^2 [\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1}]. \quad (9.14)$$

Na záver porovnáme stredné chyby každého prevýšenia pred a po vyrovnaní podľa vzťahov  $\sigma'_i = \sqrt{C_{\ell\ell i}}$  a  $\sigma_i = \sqrt{C_{LLi}}$ .

**Príklad 9.1:** Niveláčna sieť predstavuje lineárny model vyrovnaní meraní s podmienkami. Na obr. 9.4 šípky označujú kladný smer prevýšenia v zmysle pravotočivej schémy

$$\begin{aligned} \ell_1 &= +4,021 \text{ m} & s_1 &\approx 1,5 \text{ km}, \\ \ell_2 &= +3,806 \text{ m} & s_2 &\approx 1,5 \text{ km}, \\ \ell_3 &= +10,735 \text{ m} & s_3 &\approx 1,5 \text{ km}, \\ \ell_4 &= +2,905 \text{ m} & s_4 &\approx 1,75 \text{ km}, \\ \ell_5 &= +6,921 \text{ m} & s_5 &\approx 0,75 \text{ km}. \end{aligned}$$



Obr. 9.4. Vyrovnanie nivelačnej siete

#### PODMIENKOVÉ ROVNICE

$$\begin{aligned} L_1 & & + L_4 & - L_5 & = 0 \\ & + L_2 & - L_3 & + L_5 & = 0 \end{aligned}$$

a rovnice uzáverov sú:

$$\begin{aligned} + \ell_1 & & + \ell_4 & - \ell_5 & = u_1 = +5 \text{ mm}, \\ & + \ell_2 & - \ell_3 & + \ell_5 & = u_2 = -8 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Matica váhových koeficientov podľa rovnice (9.4) je  $\mathbf{P}_{(5,5)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Pretvorené podmienkové rovnice v maticovom zápise majú tvar

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{u} = 0,$$

kde

$$\mathbf{A}_{(2,5)}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{(5,1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} +5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Opravy vypočítame s použitím vzťahov ( ) a ( )

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -0,7 \\ +2,2 \\ -2,2 \\ -0,7 \\ +3,6 \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané prevýšenia sú

$$L = \ell + v = \begin{pmatrix} +4,021 \\ +3,806 \\ +10,735 \\ +2,905 \\ +6,921 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,0007 \\ +0,0022 \\ -0,0022 \\ -0,0007 \\ +0,0036 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4,0203 \\ +3,8082 \\ +10,7328 \\ +2,9043 \\ +6,9246 \end{pmatrix}.$$

Jednotková stredná chyba (aposteriórna) je

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{2}} = 3,5_1 \text{ mm.}$$

Váhový koeficient bol zavedený vzťahom  $p_i = \frac{1,5 \text{ km}}{R \text{ km}}$ . To znamená, že váha merania je rovná 1, pre dĺžku nivelačného oddielu 1,5 km. Jednotkovú strednú chybu v dĺžke oddielu 1 km vypočítame zo vzťahu

$$\sigma_{01\text{km}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1,5}} = 2,8_6 \text{ mm.}$$

V zmysle toho, strednú chybu v nivelačnom oddiele o dĺžke  $R$  v km vypočítame zo vzťahu

$$\sigma_R = \sigma_{01\text{km}} \sqrt{R}.$$

Použitím vzťahov (5.113) a (5.112) vypočítame matice kofaktorov a matice variancií premenných veličín  $\ell_i$ ,  $v_i$  a  $L_i$

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 & -0,1 & 0,15 & -0,2 \\ 0,1 & 0,4 & -0,4 & 0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,4 & 0,4 & -0,1 & -0,2 \\ 0,15 & 0,1 & -0,1 & 0,15 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 & -0,2 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{LL} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,35 & -0,1 & 0,1 & -0,15 & 0,2 \\ -0,1 & 0,6 & 0,4 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ -0,15 & -0,1 & 0,1 & 0,35 & 0,2 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{uu} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{uu} = \begin{pmatrix} 6,1499 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12,2998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,2998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,1499 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12,2998 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{vv} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{vv} = \begin{pmatrix} 1,845 & 1,23 & -1,23 & 1,845 & -2,46 \\ 1,23 & 4,9199 & -4,9199 & 1,23 & 2,46 \\ -1,23 & -4,9199 & 4,9199 & -1,23 & -2,46 \\ 1,845 & 1,23 & -1,23 & 1,845 & -2,46 \\ -2,46 & 2,46 & -2,46 & -2,46 & 7,3799 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{LL} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{LL} = \begin{pmatrix} 4,3049 & -1,23 & 1,23 & -1,845 & 2,46 \\ -1,23 & 7,3799 & 4,9199 & -1,23 & -2,46 \\ 1,23 & 4,9199 & 7,3799 & 1,23 & 2,46 \\ -1,845 & -1,23 & 1,23 & 4,3049 & 2,46 \\ 2,46 & -2,46 & 2,46 & 2,46 & 4,9199 \end{pmatrix}$$

Z prvkov na diagonále matíc variancií  $\mathbf{C}_{\ell\ell}$  a  $\mathbf{C}_{LL}$  môžeme vypočítať stredné chyby každého prevýšenia pred a po vyrovnaní podľa vzťahu  $\sigma'_i = \sqrt{C_{\ell\ell i}}$  a  $\sigma_i = \sqrt{C_{LLi}}$ .

Tabuľka č. 9.1

PRED VYrovnáním	Po vyrovnaní
$\sigma'_1 = 2,48 \text{ mm}$	$\sigma_1 = 2,07 \text{ mm}$
$\sigma'_2 = 3,51 \text{ mm}$	$\sigma_2 = 2,72 \text{ mm}$
$\sigma'_3 = 3,51 \text{ mm}$	$\sigma_3 = 2,72 \text{ mm}$
$\sigma'_4 = 2,48 \text{ mm}$	$\sigma_4 = 2,07 \text{ mm}$
$\sigma'_5 = 3,51 \text{ mm}$	$\sigma_5 = 2,22 \text{ mm}$

Z tabuľky je zrejmé, že stredné chyby prevýšení po vyrovnaní sa zmenšili asi o 20 ~ 25 %. Poukazuje to na to, že v danom príklade počet meraní  $n = 5$  a počet podmienok  $t = 2$ , je príliš malý na spoľahlivé určenie stredných chýb. Na spoľahlivé určenie stredných chýb je potrebný súbor s väčším počtom nadbytočných meraní.

Vyrovnané prevýšenie MNS medzi bodmi  $P_1$  a  $P_3$  dostaneme z vyrovnaných prevýšení

$$L_{1,2} = L_1 + L_2 = 4,020_3 + 3,808_2 = 7,828_5 \text{ m.}$$

Aposteriornu varianciu a strednú chybu prevýšenia  $L_{12}$  vypočítame podľa vzťahu

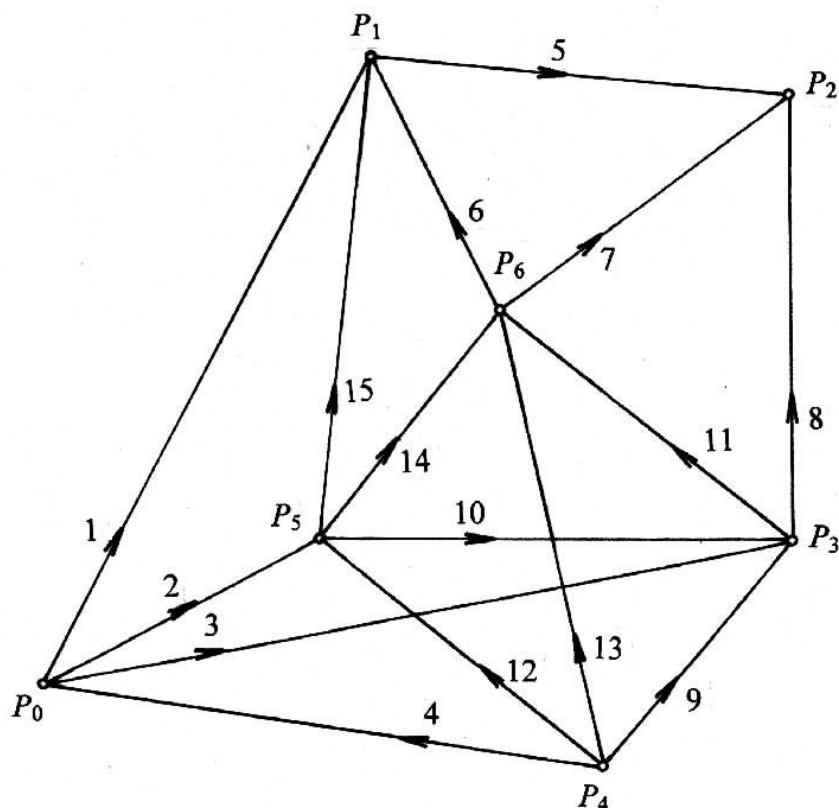
$$\sigma_{13}^2 = \mathbf{D} \mathbf{C}_{LL} \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}_{LL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9,2248 \text{ mm}^2, \quad \sigma_{13} = 3,04 \text{ mm.}$$

## 9.2 Vyrovnanie výškovej siete podľa sprostredkujúcich meraní

Podľa sprostredkujúcich meraní vyrovnávame výškové siete, pri ktorých je

$$h \geq 2 (n - 1) \quad (9.15)$$

kde  $h$  znamená počet meraných výškových rozdielov a  $n$  je počet výškovo určených bodov. Veľký počet  $h$  sa obyčajne vyskytuje pri sieťach, ktorých výškové rozdiely sú určené trigonometrickým meraním. Keďže takéto meranie je menej presné, zvyšujeme spoľahlivosť výsledkov viacnásobným určením výšky bodu. Takto vznikne sieť s veľkým počtom zámer, ktoré sa navzájom križujú (obr. 9.5).



Obr. 9.5. Vyrovnávanie výškovej siete sprostredkujúcimi meraniami

Rovnako však môžeme vyrovnáť podľa sprostredkujúcich meraní aj nivelačné siete, v ktorých výškové rozdiely meriame geometrickou niveláciou. Tu sa nevyskytujú nivelačné ťahy, ktoré by sa križovali. Preto sieť vyznačenú na obr. 9.5 môžeme po vypustení zámer 3 a 10 pokladať aj za nivelačnú sieť.

Máme 7 bodov, 15 výškových rozdielov, z toho 6 nutných a 9 nadbytočných. Normálnych rovníc bude 6.

Pri vyrovnaní si najprv zostavíme výškové rozdiely a vypočítame príslušné váhy podľa vzťahu (9.4). Označíme neznáme. Jeden bod zvolíme za nulový, výšky ostatných bodov určíme vzhľadom na zvolený bod. Prevýšenia ostatných bodov sú neznáme, označíme ich napríklad  $X$ . V našom prípade položíme výšku bodu  $P_0 = 0$ . Smer stúpania je označený šipkou. Výškový rozdiel

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_0 & \text{ je } X_1, \\
 P_2 - P_0 & \text{ je } X_2, \\
 P_3 - P_0 & \text{ je } X_3, \\
 P_4 - P_0 & \text{ je } X_4, \\
 P_5 - P_0 & \text{ je } X_5, \\
 P_6 - P_0 & \text{ je } X_6.
 \end{aligned}
 \tag{9.16}$$

Pomocou odmeraných prevýšení  $L_i$  vypočítame približné hodnoty  $x_{01}, x_{02} \dots$ . Potom neznáme sú:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{01} + x_1, \\ X_2 &= x_{02} + x_2, \\ &\vdots \\ X_6 &= x_{06} + x_6. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Keďže  $x_{0i}$  sú v každej rovnici známe, potrebujeme k ďalším výpočtom len hodnoty  $x_i$ . Prejdeme k zostaveniu rovníc opráv. Pri ich zostavení vychádzame z rovníc opraveného merania, napríklad pre merané prevýšenie  $L_9$  je:

$$L_9 + v_9 = X_3 - X_4, \text{ keď } X_3 = x_{03} + x_3, \quad X_4 = x_{04} + x_4,$$

Z toho

$$v_9 = +x_3 - x_4 + (x_{03} - x_{04} - L_9),$$

$$v_9 = +x_3 - x_4 + \ell_9.$$

Podľa toho môžeme rovnice opráv zostaviť priamo podľa náčrtu siete:

$$\begin{aligned} v_1 &= +x_1 \dots \dots \dots + (x_{01} - L_1), \\ v_2 &= \dots \dots \dots +x_5 \dots + (x_{05} - L_2), \\ v_3 &= \dots \dots +x_3 \dots \dots + (x_{03} - L_3), \\ v_4 &= \dots \dots \dots -x_4 \dots \dots + (-x_{04} - L_4), \\ v_5 &= -x_1 +x_2 \dots \dots \dots + (x_{02} - x_{01} - L_5), \\ v_6 &= +x_1 \dots \dots \dots -x_6 + (x_{01} - x_{06} - L_6), \\ v_7 &= \dots +x_2 \dots \dots \dots -x_6 + (x_{02} - x_{06} - L_7), \\ &\vdots \\ v_{14} &= \dots \dots \dots -x_5 +x_6 + (-x_{05} + x_{06} - L_{14}), \\ v_{15} &= +x_1 \dots \dots \dots -x_5 \dots + (+x_{01} - x_{05} - L_{15}). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Výraz v zátvorke predstavuje člen  $\ell$ , ktorý môžeme vyjadriť v cm. Potom aj neznáme doplnky  $x_1, x_2 \dots$  budú pri vyrovnaní v cm. Rovnice opráv  $v_1 \dots v_{15}$  porovnáme so všeobecným tvarom

$$v = ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots + \ell.$$

Určíme hodnoty koeficientov  $a, b, c, \dots$ , ktoré budú  $+1$  alebo  $-1$ . Pripojíme váhy  $p_1 \dots p_{15}$ .

Zostavíme rovnice opráv v maticovom tvare. Opravy určíme vyrovnaním MNŠ podľa postupu vyrovnania sprostredkujúcich meraní a vykonáme analýzu vyrovnaných odmeraných veličín

**Príklad 9.2:** Niveláčnú sieť vyrovnáme metódou sprostredkujúcich meraní. Medzi niveláčnymi bodmi  $P_1$  až  $P_4$  v zmysle vyznačených šípok boli odmerané prevýšenia  $\ell'_i$  pri dĺžkach oddielov  $R_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) (obr. 5.1). Šípky vyjadrujú vzťah kladného prevýšenia medzi bodmi.

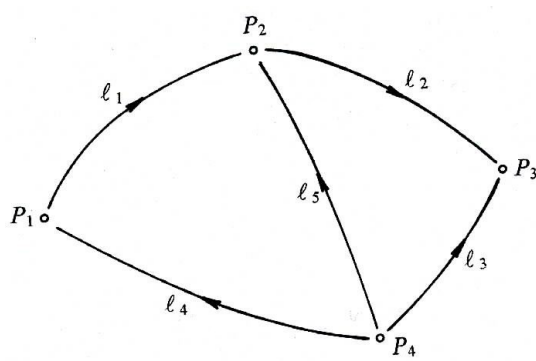
$$\ell'_1 = 4,021 \text{ m } R_1 \approx 0,75 \text{ km},$$

$$\ell'_2 = 3,806 \text{ m } R_2 \approx 1,5 \text{ km},$$

$$\ell'_3 = 10,735 \text{ m } R_3 \approx 1,5 \text{ km},$$

$$\ell'_4 = 2,905 \text{ m } R_4 \approx 0,75 \text{ km},$$

$$\ell'_5 = 6,921 \text{ m } R_5 \approx 1,5 \text{ km}.$$



Obr. 9.7. Vyrovnávanie nivelačnej siete

sprostredkujúcimi meraniami

Vyrovnávanie nivelačnej siete môže postupovať dvoma spôsobmi. Ak nemáme danú výšku žiadneho vzťažného bodu, ide o vyrovnávanie voľnej siete. Ak máme danú výšku aspoň jedného bodu, vyrovnávame viazanú sieť. V našom príklade máme danú výšku bodu  $P_4$   $H_4 = 10,000 \text{ m}$ . Vyrovnáme viazanú sieť metódou sprostredkujúcich meraní. Neznámymi budú prevýšenia  $x_i$  medzi bodmi  $P_4$  a  $P_i$  ( $i = 1,3$ ). Zostavíme rovnice opráv

$$v_1 = x_2 - x_1 - \ell'_1 = -x_1 \quad x_2 \quad 0 \quad 0 \quad -\ell'_1$$

$$v_2 = x_3 - x_2 - \ell'_2 = 0 \quad -x_2 \quad +x_3 \quad 0 \quad -\ell'_2$$

$$v_3 = x_3 - H_4 - \ell'_3 = 0 \quad 0 \quad +x_3 \quad -H_4 \quad -\ell'_3.$$

$$v_4 = x_1 - H_4 - \ell'_4 = +x_1 \quad 0 \quad 0 \quad -H_4 \quad -\ell'_4$$

$$v_5 = x_2 - H'_4 - \ell'_5 = 0 \quad x_2 \quad 0 \quad -H_4 \quad -\ell'_5$$

Rovnice v maticovom zápise budú

$$\mathbf{v}_{(5,1)} = \mathbf{A}_{(5,3)} \mathbf{x}_{(3,1)} + \mathbf{c}_{(5,1)} - \ell'_{(5,1)} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \ell,$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10,000 \\ -10,000 \\ -10,000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +4,021 \\ +3,806 \\ +10,735 \\ +2,905 \\ +6,921 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +4,021 \\ +3,806 \\ +20,735 \\ +12,905 \\ +16,921 \end{pmatrix}.$$

Keď použijeme vzťah  $p_i = \frac{1,5 \text{ km}}{R_i \text{ km}}$ , matica váhových koeficientov a kofaktorov bude

$$\mathbf{P}_{(5,5)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{(5,5)} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matica koeficientov normálnych rovníc  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  a inverzná matica  $\mathbf{N}^{-1}$  sú

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané hodnoty výšok bodov vypočítame zo vzťahu

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell = \begin{pmatrix} 12,9043 \\ 16,9246 \\ 20,7328 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Opravy vypočítame z rovnice } \mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \ell = \begin{pmatrix} -0,0007 \\ +0,0022 \\ -0,0022 \\ -0,0007 \\ +0,0036 \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané prevýšenia  $L_i = \ell'_i + v_i$  sú:  $L_1 = +4,020_3$  m,

$$L_2 = +3,808_2 \text{ m,}$$

$$L_3 = +10,732_8 \text{ m,}$$

$$L_4 = +2,904_3 \text{ m,}$$

$$L_5 = +6,924_6 \text{ m.}$$

Hodnotu aposteriórnej jednotky strednej chyby vypočítame zo vzťahu

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{5-3}} = 3,5_1 \text{ mm.}$$

Výpočet prekontrolujeme:

a) vyčíslením vzťahu

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0,$$

b) sigmovými skúškami

$$\sum_{\text{I}} = \sum_{\text{III}},$$

$$\sum_{\text{I}} = \ell^T \mathbf{P} \mathbf{Ax} + \ell^T \mathbf{P} \ell = 2,46 \cdot 10^{-5},$$

$$\sum_{\text{III}} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 2,46 \cdot 10^{-5}.$$

Vypočítame matice kofaktorov

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 & -0,1 & 0,15 & -0,2 \\ 0,1 & 0,4 & -0,4 & 0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,4 & 0,4 & -0,1 & -0,2 \\ 0,15 & 0,1 & -0,1 & 0,15 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 & -0,2 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}, \quad \mathbf{Q}_{\ell\ell} = \begin{pmatrix} 0,35 & -0,1 & 0,1 & -0,15 & 0,2 \\ -0,1 & 0,6 & 0,4 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ -0,15 & -0,1 & 0,1 & 0,35 & 0,2 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Kovariančné matice neznámych výšok  $\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ , odmeraných prevýšení  $\mathbf{C}_{\ell\ell}$  sú

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4,3049 & 2,46 & 1,23 \\ 2,46 & 4,9199 & 2,46 \\ 1,23 & 2,46 & 7,3799 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\ell\ell} \quad \mathbf{C}_{\ell\ell} = \begin{pmatrix} 4,3049 & -1,23 & 1,23 & -1,845 & 2,46 \\ -1,23 & 7,3799 & 4,9199 & -1,23 & -2,46 \\ 1,23 & 4,9199 & 7,3799 & 1,23 & 2,46 \\ -1,845 & -1,23 & 1,23 & 4,3049 & 2,46 \\ 2,46 & -2,46 & 2,46 & 2,46 & 4,9199 \end{pmatrix}.$$

Stredné chyby výšok  $H_i$  bodov  $P_i$  ( $i = 1, 3$ )  $\sigma_{xi}$  a prevýšení  $\sigma_{\ell i}$  sú:

$$\sigma_{x1} = \sqrt{4,3049} = 2,07_5 \text{ mm}, \sigma_{\ell 1} = \sqrt{4,3049} = 2,07_5 \text{ mm}, \sigma_{\ell 4} = \sqrt{4,3049} = 2,07_5 \text{ mm},$$

$$\sigma_{x2} = \sqrt{4,9199} = 2,21_8 \text{ mm}, \sigma_{\ell 2} = \sqrt{7,3799} = 2,71_7 \text{ mm}, \sigma_{\ell 5} = \sqrt{4,9199} = 2,21_8 \text{ mm},$$

$$\sigma_{x3} = \sqrt{7,3799} = 2,71_7 \text{ mm}, \sigma_{\ell 3} = \sqrt{7,3799} = 2,71_7 \text{ mm}.$$

Výpočet strednej chyby  $\sigma_{13}$  neznámeho prevýšenia  $h_{13}$  máme uvedený v príklade 5.1.