

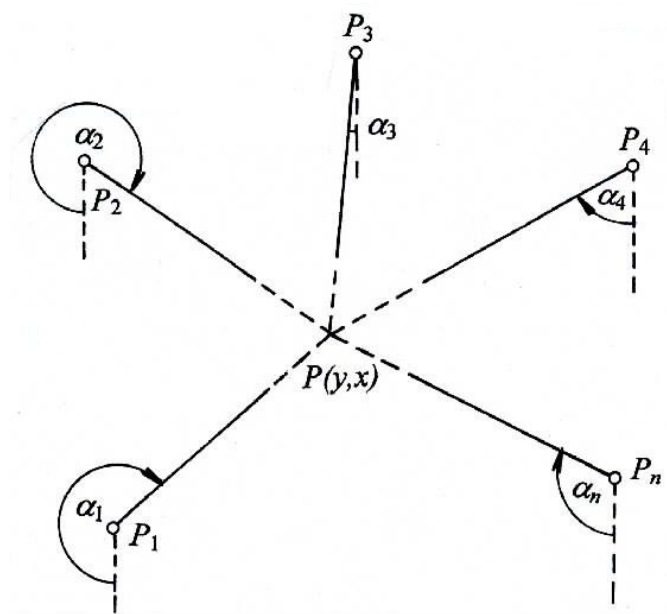
5. VÝPOČTY V TRIGONOMETRICKEJ SIETI S VYROVNANÍM METÓDOU NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Kapitola obsahuje problematiku zhŕšťovania bodového poľa s väzbou na dané (vzťahné) body o známych súradniciach (y, x) . Vzťahy na výpočet smerníka hlavnej polosi strednej elipsy chýb ψ a vzťahy na výpočet veľkosti polos a, b strednej chyby elipsy sú uvedené v kap. 6.

5.1 Pretínanie napred smerníkmi

Nový bod $P(y, x)$ je určený pretínaním napred z bodov P_1, P_2, \dots, P_n tak, ako je vyznačené na obr. 5.1. Na daných bodoch sú odmerané osnovy smerov na viaceré body, ktorých súradnice sú známe, a do osnovy je zaradený aj smer na určovaný bod. Osnovy vystredíme na stred a cieľ a orientujeme.

Výsledkom sú odmerané smerníky na daných bodoch P_i $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, ktorými určujeme polohu nového bodu P a ich váhy $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Smerníky α_i neurčia polohu bodu jednoznačne. Pretnú sa vo viacerých priesečníkoch a vytvoria odchýlkový obrazec. Úlohou je určiť vyrovnanú polohu bodu P .



Obr. 5.1. Pretínanie napred smerníkmi

Neznámymi veličinami sú súradnice bodu P . Smerníky α_i sú sprostredkujúcou veličinou, ktorú meriame. Súradnice bodu P určíme vyrovnaním sprostredkujúcej veličiny smerníka - α_i . Určujúca rovnica pre vyrovnaný smerník σ je

$$\sigma_i = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} = f(y, x) . \quad (5.1)$$

Opravené odmerané smerníky a opravy sú:

$$\begin{aligned} \alpha_i + v_i &= \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} = f_i(y, x) , \\ v_i &= \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} - \alpha_i . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vyrovnané súradnice y, x v rovnici (5.2) nepoznáme. Nahradíme ich približnými súradnicami, ktoré vypočítame z neopravených smerníkov. Vzťah medzi vyrovnanými súradnicami y, x a približnými súradnicami y_0, x_0 vyjadrujú rovnice

$$y = y_0 + dy, \quad x = x_0 + dx. \quad (5.3)$$

Rovnice (5.3) dosadíme do funkcie $f(x, y)$, ktorú linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu. Za predpokladu, že doplnky dy a dx sú malé, môžeme druhé derivácie vynechať

$$f_i(y, x) = f_i(y_0 + dy, x_0 + dx) = f_i(y_0, x_0) + \frac{\partial f_i(y_0, x_0)}{\partial y_0} dy + \frac{\partial f_i(y_0, x_0)}{\partial x_0} dx + \dots$$

Parciálne derivácie funkcií $f_i(x, y)$ sú:

$$\frac{\partial f_i(y, x)}{\partial y_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} \right)^2} \frac{(x_0 - x_i)}{(x_0 - x_i)^2} = \frac{(x_0 - x_i)}{s_i^2} = \frac{\cos \varphi_i}{s_i},$$

$$\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial x_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} \right)^2} \frac{-(y_0 - y_i)}{(x_0 - x_i)^2} = -\frac{(y_0 - y_i)}{s_i^2} = -\frac{\sin \varphi_i}{s_i}.$$

Ak označíme približný smerník vypočítaný z približných súradníc y_0, x_0 φ_i

$$\varphi_i = f_i(y_0, x_0) = \arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}, \quad (5.4)$$

prejde rovnica (5.2) po linearizácii na tvar

$$v_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} dy - \frac{\sin \varphi_i}{s_i} dx + \varphi_i - \alpha_i. \quad (5.5)$$

Tým sme nahradili v rovniciach opráv vyrovnaný smerník približným smerníkom. V rovnici (5.5) sú neznáme iba dy a dx . Označme

$$a_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_i}, \quad b_i = \frac{\sin \varphi_i}{s_i}, \quad \ell_i = \varphi_i - \alpha_i. \quad (5.6)$$

Opravy smerníkov v_i sú v uhlovej miere. Koeficienty a_i, b_i počítame s dĺžkami v milimetroch. Koeficienty a_i, b_i prevedieme do uhlovej miery pre násobením s ρ^{cc} $\left(\rho^{\text{cc}} = \frac{200\,0000^{\text{cc}}}{\pi} \right)$,

$$\text{t. j.} \quad a_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} \rho^{\text{cc}}, \quad b_i = -\frac{\sin \varphi_i}{s_i} \rho^{\text{cc}}.$$

Potom všeobecný tvar podmienkových rovníc bude

$$v_i = a_i dy + b_i dx + \ell_i. \quad (5.7)$$

Je to dôležitý tvar rovníc opráv. Vyskytuje sa veľmi často i v ďalších vyrovnaníach. Symboly a_i, b_i sú smeroví súčinitelia (koeficienty) a člen ℓ_i je rozdiel približný smerník mínus meraný smerník. Ak rovniciam (5.7) pridáme váhy, dostaneme systém n rovníc:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 dy + b_1 dx + \ell_1 \\ v_2 = a_2 dy + b_2 dx + \ell_2 \\ \vdots \\ v_i = a_n dy + b_n dx + \ell_n \end{array} \right| \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \\ p_i \end{array} \quad (5.8)$$

Váhy určíme podľa vzťahu (3.7)

$$p = \frac{t}{t+1},$$

kde t je počet smerov použitých na výpočet odmeraného smerníka (orientáciu osnovy smerov).

Aby bola splnená podmienka vyrovnania MNS

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad (5.9)$$

musí byť

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} = 0.$$

Rovnicu (5.8) zapíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,2)} \mathbf{z}_{(2,1)} + \boldsymbol{\ell}_{(n,1)}, \quad (5.10)$$

$$\text{kde } \mathbf{v}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(n,2)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} dy \\ dx \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{(1,n)}^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n].$$

Podmienku minima v rovnici (5.9) splníme ak ju zderivujeme a položíme rovnú 0

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{z}} \right) 2 \mathbf{P} \mathbf{v} = 2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0. \quad (5.11)$$

Po dosadení rovnice opráv (5.10) do rovnice (5.11) a po úprave dostaneme

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{z} + \boldsymbol{\ell}) = 0.$$

Normálne rovnice v maticovom tvare

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\ell} = 0 \quad (5.12)$$

a vektor opráv približných súradníc je

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\ell} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\ell}. \quad (5.13)$$

Vyrovnané súradnice bodu P sú

$$y = y_0 + dy \quad \text{a} \quad x = x_0 + dx. \quad (5.14)$$

Vyrovnané smerníky sú $\sigma_1 = \alpha_1 + v_1$,

$$\sigma_2 = \alpha_2 + v_2,$$

\vdots

$$\sigma_n = \alpha_n + v_n.$$

(5.15)

Stredné chyby súradníc m_y a m_x vypočítame z jednotkovej strednej chyby (aposteriórnej)

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - k}},$$

(5.16)

kde n je počet meraných smerníkov a k je počet neznámych (neznáme sú y, x , t. zn. $k = 2$),

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}}, \quad m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}}.$$

(5.17)

Váhové koeficienty Q_{yy} a Q_{xx} sú v matici váhových koeficientov

$$\mathbf{Q}_{(2,2)} = \mathbf{N}_{(2,2)}^{-1} = \begin{vmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{vmatrix}.$$

Výpočet kontrolujeme vyčíslením sigmových skúšok \sum_I a \sum_{III} , medzi ktorými platia vzťahy $\sum_I = \sum_{III}$. Pri maticovom postupe výpočtu dy a dx sigmová skúška \sum_{II} sa neuplatňuje. Sigmové skúšky počítame zo vzťahov [2]

$$\sum_I = \sum p a \ell dy + \sum p b \ell dx + \sum p \ell \ell = \ell^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell^T \mathbf{P} \ell,$$

$$\sum_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}.$$

(5.18)

Sigmové skúšky $\sum_I = \sum_{III}$ kontrolujú:

- správnosť zostavenia koeficientov normálnych rovníc a vyčíslenie $\sum p \ell \ell$,
- výpočet opráv $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$.

Stredná elipsa chýb

Smerník hlavnej polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovnice (6.15)

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \sum ab}{\sum bb - \sum aa} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}.$$

Veľkosť polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovníc (6.27).

$$a^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right),$$

$$b^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right).$$

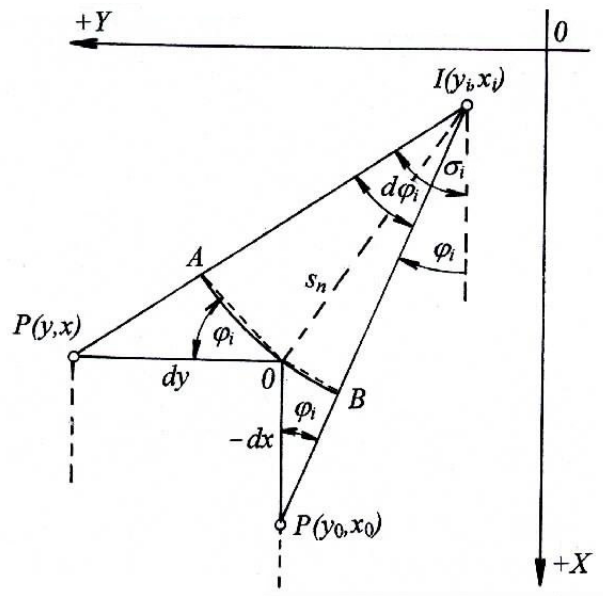
Geometrický význam koeficientov a, b

Rovnicu (5.5) môžeme odvodiť aj geometricky. Vzhľadom na rovnice (5.15), rovnicu (5.5) prepíšeme na tvar

$$\sigma_i - \varphi_i = d\varphi_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} dy - \frac{\sin \varphi_i}{s_i} dx,$$

(5.19)

kde $d\varphi_i$ znamená rozdiel vyrovnaného smerníka mínus približného smerníka. Na obr. 5.2 sú vyznačené obidva smerníky a k nim príslušné body $P(x, y)$ a $P(x_0, y_0)$.



Obr. 5.2. Geometrický význam koeficientov a, b

Podľa obr. 5.2 môžeme písať $IP = s_i = IO$,

$$\sigma_i - \varphi_i = d\varphi_i = \frac{OB}{s_i} + \frac{OA}{s_i}, \quad (5.20)$$

$$OB = -dx \sin \varphi_i,$$

$$OA = +dy \cos \varphi_i,$$

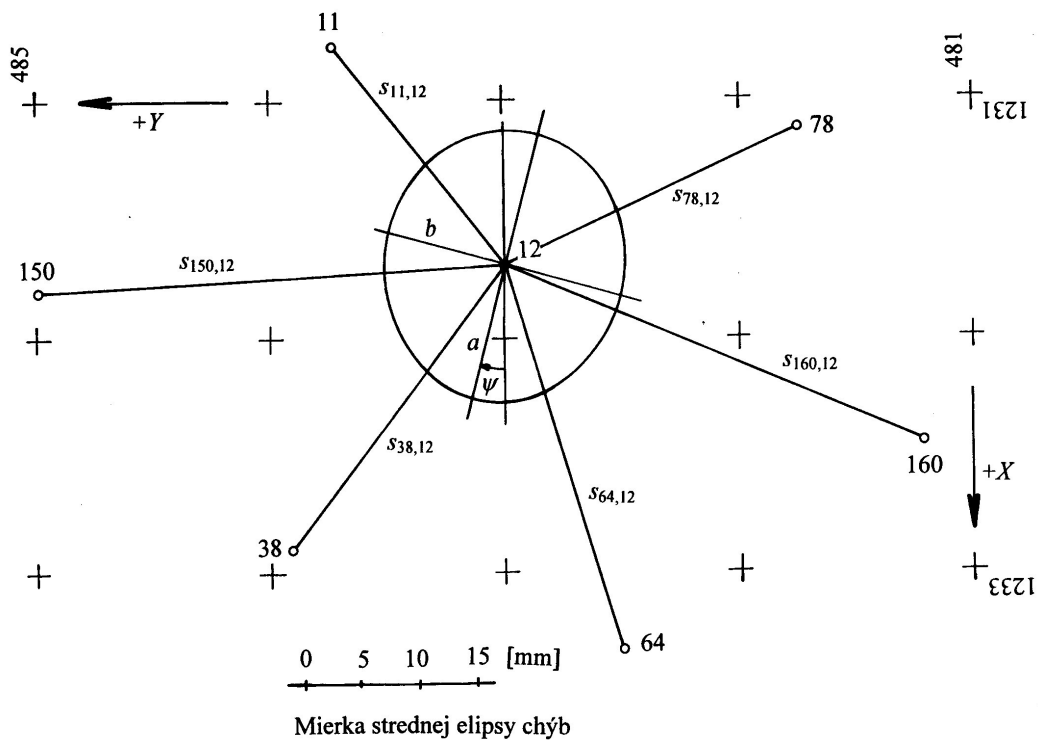
$$d\varphi_i = -\frac{\sin \varphi_i}{s_i} dx + \frac{\cos \varphi_i}{s_i} dy. \quad (5.21)$$

Príklad 5.1: Pretínaním napred smerníkmi vypočítame vyrovnané súradnice bodu 12 (obr. 5.3). Dané sú súradnice vzťažných bodov $P_i(y_i, x_i)$, kde $i = (11, 78, 160, 64, 38, 150)$, odmerané smerníky $\alpha_{i,12}$ zo vzťažných bodov na určovaný bod 12 a počet smerov t_i použitých na výpočet odmeraného smerníka.

Dané údaje

Tabuľka 5.1

Číslo bodu	y	x	$\alpha_{i,12}$	t_i
i	[m]		[g]	
11	483 730,88	1 23 761,96	357,7698 ₄	2
78	481 744,05	1 231 125,62	72,8771 ₆	2
160	481 206,09	1 232 444,99	125,1658 ₄	4
64	482 501,12	1 233 329,15	181,0932 ₄	5
38	483 916,63	1 232 896,28	241,4910 ₉	4
150	484 986,26	1 231 801,82	296,6120 ₂	5



Obr. 5.3. Vyrovnávanie súradníc bodu 12 pretínaním smerníkmi

Na výpočet koeficientov pretvorených (linearizovaných) rovníc opráv a_i , b_i , ℓ_i , použijeme približné súradnice bodu 12, ktoré sme vypočítali v príklade 4.1 $y_0 = 483\,000,91$ m, $x_0 = 1\,231\,696,05$ m. Vypočítané hodnoty φ_i (5.4) dĺžky s_{0i} a koeficienty a_i , b_i , ℓ_i sú v tabuľke 5.2.

Tabuľka 5.2

Číslo bodu	φ_i	s_{0i}	$a_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_{0i}} \rho^{cc}$	$b_i = -\frac{\sin \varphi_i}{s_{0i}} \rho^{cc}$	$\ell_i = \varphi_i - \alpha_i$	$p_i = \frac{t_i}{t_{i+1}}$
i	[g]	[m]			[cc]	
11	357,7702 ₁	1185,48 ₇	+0,423131	+0,330667	+3,7	0,666666
78	72,8765 ₈	1380,24 ₉	+0,190620	-0,420003	-5,8	0,666666
160	125,1663 ₇	1944,81 ₁	-0,126058	-0,302097	+5,3	0,8
64	181,0932 ₄	1707,86 ₆	-0,356439	-0,109084	0,0	0,833333
38	241,4910 ₆	1509,66 ₇	-0,335260	+0,255788	-0,3	0,8
150	296,6116 ₀	1988,16 ₆	-0,017035	+0,319751	-4,2	0,833333

Matice **A**, **ℓ** a **P** majú tvar

$$\mathbf{A}_{(6,2)} = \begin{pmatrix} +0,423167 & +0,330622 \\ +0,190620 & -0,420003 \\ -0,126058 & -0,302097 \\ -0,356439 & -0,109084 \\ -0,335260 & +0,255788 \\ -0,017035 & +0,319751 \end{pmatrix}, \quad \ell_{(6,1)} = \begin{pmatrix} +3,7 \\ -5,8 \\ +5,3 \\ 0,0 \\ -0,3 \\ -4,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(6,6)} = \begin{pmatrix} 0,666666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,666666 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,833333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,833333 \end{pmatrix}.$$

Vektor opráv približných súradníc bodu 12 je :

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell = \begin{pmatrix} dy \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0,246 \text{ mm} \\ +0,035 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané súradnice bodu 12 sú: $y = y_0 + dy = 483\,000,91 \text{ m} + 0,002 \text{ m} = 483\,000,910_2 \text{ m}$,

$$x = x_0 + dx = 1\,231\,696,05 \text{ m} + 0,000 = 1\,231\,696,050_0 \text{ m}.$$

Opravy vypočítame z rovnice (5.10)

$$\mathbf{v}_{(6,1)} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell = \begin{pmatrix} +3,8_2^{cc} \\ 5,7_7^{cc} \\ +5,2_6^{cc} \\ -0,9_9^{cc} \\ -0,3_7^{cc} \\ -4,1_9^{cc} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Jednotková stredná chyba je } \sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-2}} = \sqrt{\frac{68,775}{4}} = 4,14_7 \text{ mm}.$$

Matica kofaktorov je

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,856 & -0,206 \\ -0,206 & 2,448 \end{pmatrix}.$$

Stredné chyby súradníc sú:

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = 4,1 \sqrt{2,856} = 6,9 \text{ mm}.$$

$$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = 4,1 \sqrt{2,448} = 6,4 \text{ mm}.$$

$$\text{Sigmoidové skúšky: } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_I = \ell^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell^T \mathbf{P} \ell = -0,022 + 68,798 = 68,77_5$$

$$\Sigma_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 68,77_5.$$

Smerník hlavnej polosi strednej elipsy chýb podľa rovnice (6.15) je:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-0,206)}{2,448 - 2,856} = 25,16^g.$$

Keďže znamienko Q_{yx} je záporné hlavná polos prechádza 2. a 4. kvadrantom.

Veľkosť polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovnice (6.27)

$$a^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{4,14_7^2}{2} \left(2,856 + 2,448 + \sqrt{(2,448 - 2,856)^2 + 4,0,206^2} \right) = 50,55$$

$$a = 7,1_1 \text{ mm.}$$

$$b^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{4,14_7^2}{2} \left(2,856 + 2,448 - \sqrt{(2,448 - 2,856)^2 + 4,0,206^2} \right) = 40,6_2$$

$$b = 6,37 \text{ mm.}$$

Stredná elipsa chýb je zobrazená na obr. 5.3.

5.2 Vyrovnanie bodu určeného dĺžkami

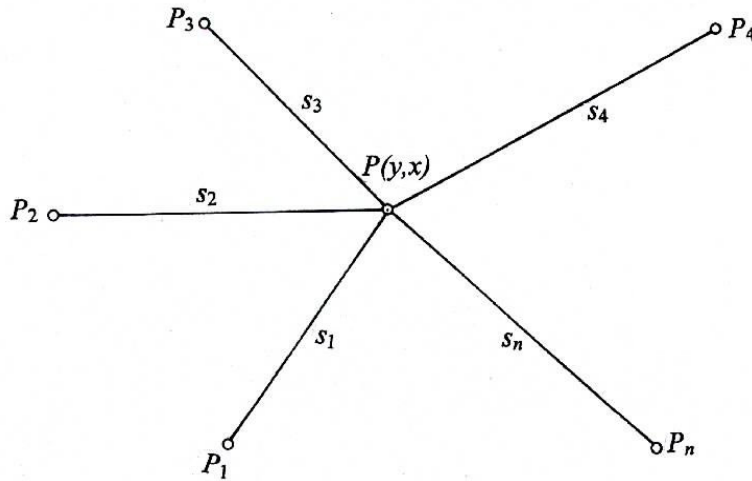
Dané sú súradnice bodov P_1, P_2, \dots, P_n , ktorých bod $P(x, y)$ je určený dĺžkami $s_1 \dots s_n$. Úlohou je vypočítať vyrovnané súradnice bodu $P(x, y)$, (obr. 5.4).

Označme vyrovnané strany S_i a merané s_i . Pre vyrovnané súradnice bodu $P(x, y)$ a strany s_i platia rovnice

$$S_i^2 = (y - y_i)^2 + (x - x_i)^2. \quad (5.22)$$

Tieto rovnice musia byť splnené i pre opravené merania

$$s_i + v_i = \left((y - y_i)^2 + (x - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = f_i(y, x). \quad (5.23)$$



Obr. 5.4 Pretínanie napred dĺžkami

Z toho dostaneme rovnice opráv

$$v_i = \left((y - y_i)^2 + (x - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - s_i. \quad (5.24)$$

Zavedením približných súradníc

$$y = y_0 + dy, \quad x = x_0 + dx. \quad (5.25)$$

prejde rovnica (5.23) do tvaru

$$s_i + v_i = f_i(x_0 + dx, y_0 + dy). \quad (5.26)$$

Kvadratickú závislosť neznámych zmeníme linearizáciou a to rozvojom do Taylorovho radu

$$f_i(y, x) = f_i(x_0 + dy, x_0 + dx) = f_i(y_0, x_0) + \frac{\partial f_i(y, x)}{\partial y_0} dy + \frac{\partial f_i(y, x)}{\partial x_0} dx + \dots$$

kde je $f_i(y_0, x_0) = s_{0i} = \sqrt{(y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2}$ je približná dĺžka ,

$$\frac{\partial f_i(y, x)}{\partial y_0} = \frac{1}{2} \left((y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(y_0 - y_i) = \frac{y_0 - y_i}{s_{0i}} = \sin \varphi_i ,$$

$$\frac{\partial f_i(y, x)}{\partial x_0} = \frac{1}{2} \left((y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(x_0 - x_i) = \frac{x_0 - x_i}{s_{0i}} = \cos \varphi_i .$$

Členy rozvoja dosadíme do rovnice (5.24)

$$v_i = s_0 + \frac{y_0 - y_i}{s_{0i}} dy + \frac{x_0 - x_i}{s_{0i}} dx - s_i . \quad (5.27)$$

Ak koeficienty (v metroch) označíme

$$a_i = \frac{y_0 - y_i}{s_{0i}}, b_i = \frac{x_0 - x_i}{s_{0i}}, \ell_i = s_{0i} - s_i \text{ (približná dĺžka – meraná dĺžka)} \quad (5.28)$$

dostaneme systém rovníc opráv

$$\begin{array}{l} v_1 = a_1 dy + b_1 dx + \ell_1 \\ v_2 = a_2 dy + b_2 dx + \ell_2 \\ \vdots \\ v_n = a_n dy + b_n dx + \ell_n \end{array} \left| \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right. . \quad (5.29)$$

Jednotlivé merania môže mať rôznu váhu. Ak prisúdime dĺžke 1000 m napr. váhu $p = 1$, potom váha p_i dĺžky s_i bude

$$p_i = \frac{1000}{s_i} . \quad (5.30)$$

Pri meraní dĺžok kalibrovaným elektronickým teodolitom presnosť odmeraných dĺžok je prakticky rovnaká bez ohľadu na odmeranú vzdialenosť ak $s < 3000$ m. Vtedy zavedieme váhu = 1.

Opravy vyčíslime jedenkrát z rovníc (5.29) a druhý krát z rovníc (5.24).

$$\begin{array}{l} v_1 = a_1 dy + b_1 dx + \ell_1 \\ \vdots \\ v_n = a_n dy + b_n dx + \ell_n \end{array} \left| \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} v_1 = S_1 - s_1 \\ \vdots \\ v_n = S_n - s_n \end{array} ,$$

kde S_i je dĺžka vypočítaná z vyrovnaných súradníc a s_i je odmeraná dĺžka. Kontrolu výpočtu vykonáme signovými skúškami \sum_I a \sum_{III} , o ktorých platí $\sum_I = \sum_{III}$ (5.17).

V ďalšom postupe vyrovnania postupujeme ako pri pretínaní napred smerníkmi. Zostavíme rovnice opráv (5.10) a vypočítame vektor neznámych \mathbf{z} (5.13). Vyrované súradnice budú ako v rovnici (5.14).

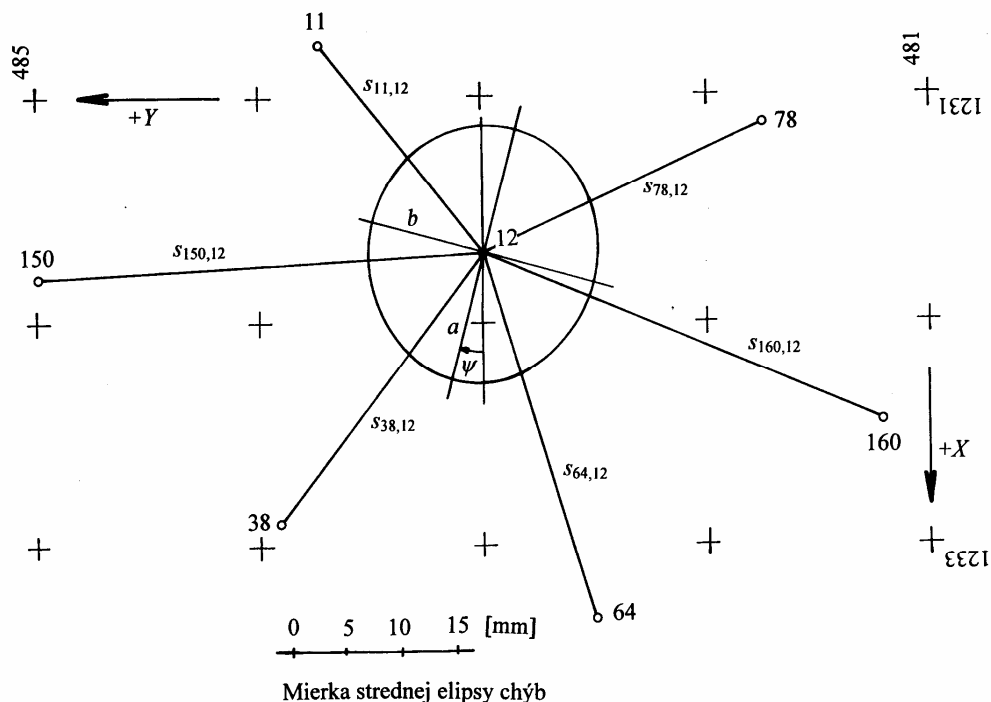
Stredná chyba pre jednotkovú váhu (dĺžku 1000 m) bude (v metroch)

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-2}} . \quad (5.31)$$

Stredné chyby vyrovnaných súradníc vypočítame podľa rovníc (5.16). Určujúce prvky strednej elipsy chýb vypočítame podľa vzťahov (6.14) a (6.27).

Príklad 5.2: Pretínaním napred dĺžkami vypočítame vyrovnané súradnice bodu 12 (obr. 5.5). Dané sú súradnice vzťažných bodov $P_i(y_i, x_i)$, kde $i = (11, 78, 160, 64, 38, 150)$, odmerané dĺžky medzi vzťažnými bodmi a určovaným bodom $s_{i,12}$.

Na výpočet koeficientov pretvorených rovníc opráv a_i, b_i, ℓ_i , použijeme približné súradnice bodu 12, ktoré sme vypočítali v príklade 4.1. Vypočítané hodnoty s_{0i} , koeficienty a_i, b_i, ℓ_i a váhové koeficienty p_i sú v tabuľke 5.3.



Obr. 5.5. Vyrovnanie súradníc bodu 12 pretínaním z dĺžok

Tabuľka 5.3

Č. b.	φ_i	s_{0i}	s_i	$a_i = \sin \varphi_i$	$b_i = \cos \varphi_i$	$\ell_i = s_{0i} - s_i$	$p_i = \frac{1000}{s_i}$
i	[g]	[m]				[mm]	
11	357,7702 ₁	1185,48 ₇	1185,47	-0,615755	+0,787938	+17	0,843547
78	72,8765 ₈	1380,24 ₉	1380,26	+0,910604	+0,413280	-11	0,724501
160	125,1663 ₇	1944,81 ₁	1994,80	+0,922876	-0,385096	+11	0,514192
64	181,0932 ₄	1707,86 ₆	1707,84	+0,292640	-0,956223	+26	0,585535
38	241,4910 ₆	1509,66 ₇	1509,68	-0,606571	-0,795030	-13	0,662392
150	296,6116 ₀	1988,16 ₆	1988,16	-0,998584	-0,053200	+6	0,502978

Matice \mathbf{A} , ℓ a \mathbf{P} majú tvar

$$\mathbf{A}_{(6,2)} = \begin{pmatrix} -0,615755 & +0,787938 \\ +0,910604 & +0,413280 \\ +0,922876 & -0,385096 \\ +0,292640 & -0,956223 \\ -0,606571 & -0,795030 \\ -0,998584 & -0,053200 \end{pmatrix}, \quad \ell_{(6,1)} = \begin{pmatrix} +17 \\ -11 \\ +11 \\ +26 \\ -13 \\ +6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(6,6)} = \begin{pmatrix} 0,843547 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,724501 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,514192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,585535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,662392 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,502978 \end{pmatrix}.$$

Vektor opráv približných súradníc bodu 12 je

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell = \begin{pmatrix} dy \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,03_9 \\ 1,38_4 \end{pmatrix}.$$

Opravy vypočítame z rovnice (5.29)

$$\mathbf{v}_{(6,1)} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell = \begin{pmatrix} 16,8_2 \text{ mm} \\ -8,5_7 \text{ mm} \\ 12,3_5 \text{ mm} \\ 25,2_7 \text{ mm} \\ -15,3_2 \text{ mm} \\ 3,8_9 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Jednotková stredná chyba je } \sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-2}} = \sqrt{\frac{90814_1}{6-2}} = 15,0_7 \text{ mm}.$$

Vyrovnané súradnice bodu 12 sú:

$$y = y_0 + dy = 483\,000,91 \text{ m} + 0,002_0 = 483\,000,912_0 \text{ m},$$

$$x = x_0 + dx = 1\,231\,696,051 \text{ m} + 0,001_4 = 1\,231\,696,051_4 \text{ m}.$$

Matica kofaktorov je

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,467 & 0,038 \\ 0,038 & 0,599 \end{pmatrix}.$$

Stredné chyby súradníc sú:

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = 15,0_7 \sqrt{0,467} = 10,3 \text{ mm},$$

$$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = 15,0_7 \sqrt{0,599} = 11,7 \text{ mm}.$$

$$\text{Sigmové skúšky: } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_I = \ell^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell^T \mathbf{P} \ell = -11,399 + 919,540 = 908,141,$$

$$\Sigma_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 908,141.$$

Smerník hlavnej polosi strednej elipsy chýb podľa rovnice (6.15) je:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-0,038)}{0,599 - 0,467} = 16,628^\circ \dots$$

Keďže znamienko Q_{yx} je kladné hlavná polos prechádza 1. a 3. kvadrantom.

Veľkosť polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovnice (6.27)

$$a^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{15,1^2}{2} \left(0,467 + 0,599 + \sqrt{(0,599 - 0,467)^2 + 4 \cdot 0,038^2} \right) = 138,88_1$$

$$a = 11,8 \text{ mm.}$$

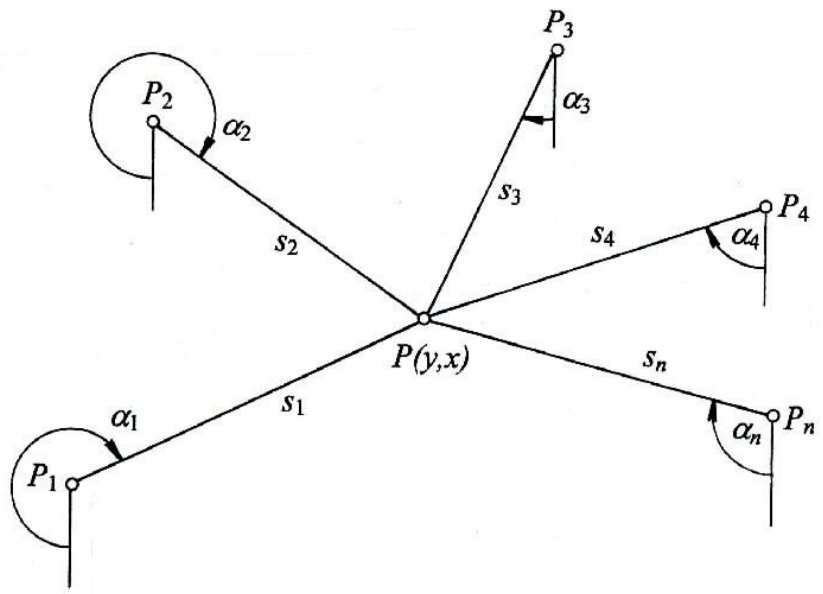
$$b^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{15,1^2}{2} \left(0,467 + 0,599 - \sqrt{(0,599 - 0,467)^2 + 4 \cdot 0,038^2} \right) = 104,17_8$$

$$b = 10,2 \text{ mm.}$$

Stredná elipsa chýb je zobrazená na obr. 5.5.

5.2 Vyrovnanie súradníc bodu pretínaním napred súčasne určeným smerníkmi a dĺžkami

Nový bod $P(y, x)$ je určený pretínaním napred z bodov P_1, P_2, \dots, P_n pomocou odmeraných smerníkov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, a odmeraných dĺžok s_1, s_2, \dots, s_n (obr. 5.6).



Obr. 5.6. Pretínanie napred smerníkmi a dĺžkami

Funkčný vzťah medzi súradnicami bodu P_i a bodu P vyjadrujú rovnice

$$\sigma_i = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} = f \sigma_i,$$

$$S_i = \left((y - y_i)^2 + (x - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = fs_i . \quad (5.32)$$

Rovnice opráv budú mať tvar

$$\begin{aligned} v_{\sigma_i} &= f\sigma_i(y_0 + dy, x_0 + dx) - \alpha_i , \\ v_{s_i} &= fs_i(y_0 + dy, x_0 + dx) - s_i . \end{aligned} \quad (5.33)$$

V rovniciach (5.33) y a x sú súradnice určovaného bodu P , α_i je odmeraný smerník a s_i je odmeraná dĺžka, dy a dx sú vyrovnané súradnicové prírastky bodu P , ktoré určíme vyrovnaním.

Za predpokladu, že súradnicové prírastky dy a dx budú malé, funkcie $f\sigma_i$ a fs_i rozvineme do Taylorovho radu so zanedbaním parciálnych derivácií vyššieho stupňa

$$\begin{aligned} v_{\sigma_i} &= f\sigma_i(y_0, x_0) + \frac{\partial f\sigma_i}{\partial y_0} dy + \frac{\partial f\sigma_i}{\partial x_0} dx - \alpha_i , \\ v_{s_i} &= fs_i(y_0, x_0) + \frac{\partial fs_i}{\partial y_0} dy + \frac{\partial fs_i}{\partial x_0} dx - s_i . \end{aligned} \quad (5.34)$$

V rovnici (5.34) sú

$$f\sigma_i(y_0, x_0) = \arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} = \varphi_i, \quad \frac{\partial f\sigma_i}{\partial y_0} = \frac{\Delta x_{i0}}{s_i^2} = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} \rho^{cc}, \quad \frac{\partial f\sigma_i}{\partial x_0} = -\frac{\Delta y_{i0}}{s_i^2} = -\frac{\sin \varphi_i}{s_i} \rho^{cc}, \quad (5.35)$$

$$fs_i(y_0, x_0) = \sqrt{(y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2} = s_{i0}, \quad \frac{\partial fs_i}{\partial y_0} = \frac{\Delta y_{i0}}{s_i} = \sin \varphi_i, \quad \frac{\partial fs_i}{\partial x_0} = \frac{\Delta x_{i0}}{s_i} = \cos \varphi_i$$

Po dosadení rozvoja Taylorovho radu (5.35) do rovníc opráv (5.34) dostaneme pretvorené rovnice opráv

$$v_{\sigma_i} = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} \rho^{cc} dy - \frac{\sin \varphi_i}{s_i} \rho^{cc} dx + (\varphi_i - \alpha_i) = a_i dy + b_i dx + \ell_i , \quad (5.36)$$

$$v_{s_i} = \sin \varphi_i dy + \cos \varphi_i dx + (s_{i0} - s_i) = c_i dy + d_i dx + k_i .$$

V maticovom zápise

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\sigma} &= \mathbf{A}_{\sigma} \mathbf{z}_{\sigma} + \ell_{\sigma} , \\ \mathbf{v}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{z}_s + \ell_s . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Merané smerníky α_i boli vypočítané zo smerníkov na súradnicovo známe body a z odmeraných vodorovných uhlov. Váhové koeficienty boli vypočítané zo vzťahov:

$$p_s = \frac{c}{m_s^2} = 1 , \quad m_{\sigma} = E(m_{\sigma}), \quad p_{\sigma} = \frac{c}{(s_i m_{\sigma} / \rho)^2} . \quad (5.38)$$

Podmienku vyrovnanania metódou najmenších štvorcov vyjadríme funkciou

$$\mathbf{v}_{\sigma}^T \mathbf{P}_{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma} + \mathbf{v}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{v}_s = \min . \quad (5.39)$$

Rovnicu (5.39) derivujeme a upravíme

$$\left(\frac{\delta \mathbf{v}_\sigma}{\delta \mathbf{z}}\right)^T 2\mathbf{P}_\sigma \mathbf{v}_\sigma + \left(\frac{\delta \mathbf{v}_s}{\delta \mathbf{z}}\right)^T 2\mathbf{P}_s \mathbf{v}_s = 0. \quad (5.40)$$

Vektor neznámych súradnicových prírastkov $\mathbf{z}_{(n,2)} = \left| \frac{dy}{dx} \right|$ vypočítame z rovnice

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{A}_s)^{-1} (\mathbf{A}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\ell} + \mathbf{A}_s^T \mathbf{P}_s \boldsymbol{\ell}) = (\mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}^* \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}^* \boldsymbol{\ell}^* \quad (5.41)$$

Opravy smerníkov a dĺžok vypočítame z rovníc (5.37)

V rovnici (5.41) majú vektory a matice prvky:

$$\mathbf{v}_{\sigma(n,1)} = \begin{bmatrix} v_{\sigma 1} \\ v_{\sigma 2} \\ \vdots \\ v_{\sigma n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\sigma(n,2)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}_{\sigma(n,1)} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\sigma(n,n)} = \begin{bmatrix} p_{\sigma 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{\sigma 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{\sigma n} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{v}_{s(n,1)} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{s(n,2)} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}_{s(n,1)} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{s(n,n)} = \begin{bmatrix} p_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{sn} \end{bmatrix}.$$

Presnosť súradníc určovaného bodu $P(y, x)$ vyjadrujú stredné chyby:

$$m_y = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{v}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{v}_s}{n-2}} Q_{yy}, \quad (5.43)$$

$$m_x = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{v}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{v}_s}{n-2}} Q_{xx},$$

kde Q_{yy} a Q_{xx} ležia na hlavnej uhlopriečke matice

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{A}_s)^{-1}. \quad (5.44)$$

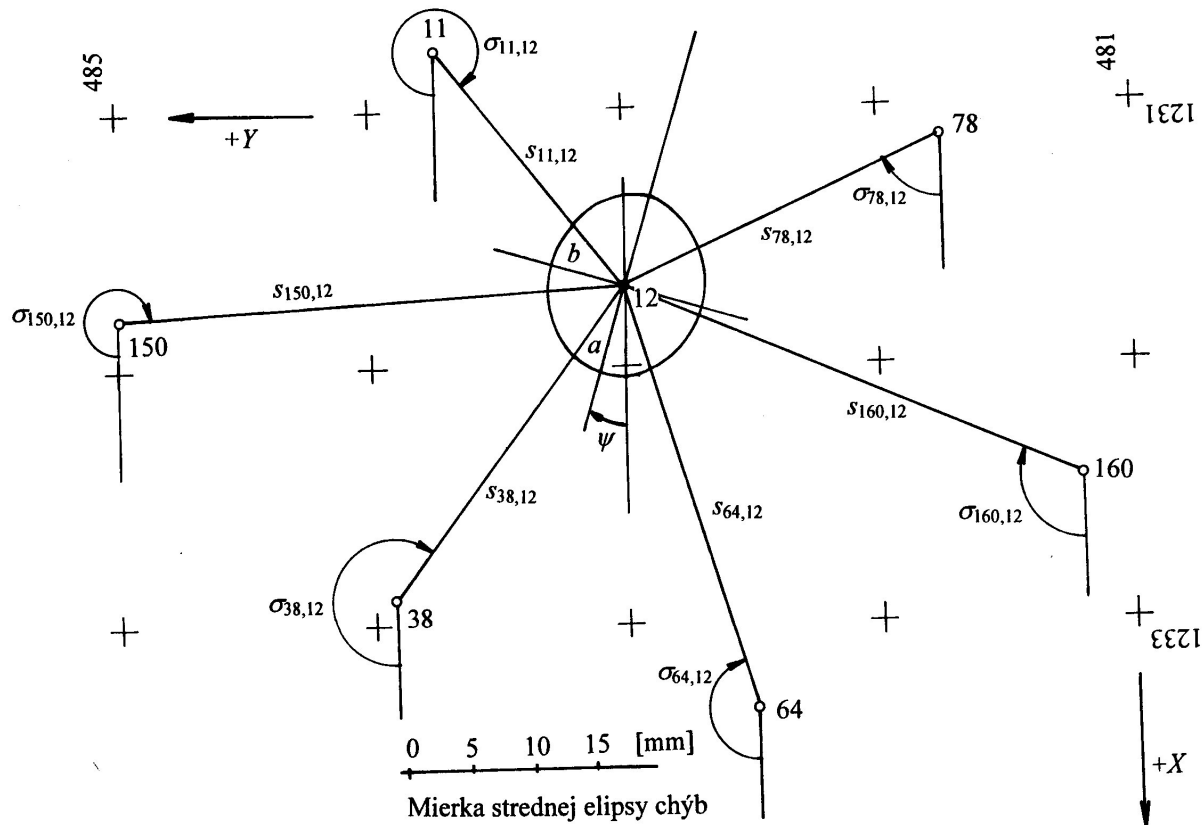
Správnosť výpočtu kontrolujeme sigmovými skúškami Σ_I a Σ_{III} (5.17). Určujúce prvky strednej elipsy chýb vypočítame podľa vzťahov (6.14) a (6.27).

Príklad 5.3: Spoločným pretínaním napred smerníkmi a dĺžkami vypočítame vyrovnané súradnice bodu 12 (obr. 5.7). Dané sú súradnice vzťažných bodov $P_i(y_i, x_i)$, kde $i = (11, 78, 160, 64, 38, 150)$, odmerané smerníky zo vzťažných bodov na určovaný bod $\alpha_{i,12}$, počet smerov t_i použitých na výpočet odmeraného smerníka, stredná chyba odmeraného smeru prístrojom TC 1700 Leica $m_\psi = 3^{\text{cc}}$, odmerané dĺžky medzi vzťažnými bodmi a určeným bodom $s_{i,12}$.

Na výpočet koeficientov pretvorených rovníc opráv $a_{\sigma i}$, $b_{\sigma i}$, $\ell_{\sigma i}$, $a_{s i}$, $b_{s i}$, $\ell_{s i}$ použijeme približné súradnice bodu 12, ktoré sme vypočítali v príklade 4.1. Koeficienty pretvorených rovníc opráv $a_{\sigma i}$, $b_{\sigma i}$, $\ell_{\sigma i}$, prevezmeme z príkladu 5.1 tab. 5.2 a a váhové koeficienty $p_{s i}$ z príkladu 5.2 tab. 5.3.

Stredné chyby odmeraných smerníkov vypočítame podľa vzťahu (3.4) $m_\alpha^2 = m_\psi^2 \left(\frac{t+1}{t} \right)$, kde t je

počet odmeraných smerov o známych smerníkoch. Váhové koeficienty pre dĺžky a smerníky vypočítame podľa vzťahov (5.37) pre $c = 100$.



Obr. 5.7. Výpočet súradníc bodu 12 spoločným pretínaním zo smerníkov a dĺžok

Výpočet váhových koeficientov

Tabuľka 5.4

Číslo bodu i	t_i	$m_{\alpha i} = \sqrt{m_{\psi}^2 \left(\frac{t+1}{t} \right)}$	s_i [mm]	$(s_i m_{\alpha} / \rho^{cc})^2$	$p_{\alpha i} = \frac{100}{(\sin m_{\alpha i} / \rho^{cc})^2}$	$m_s^2 = (2 + 3 ppm)^2$	$p_s = \frac{100}{m_s^2}$
11	2	3,6 ₇	1185490	46,70	2,141327	30,86	3,2404441
78	2	3,6 ₇	1380250	63,31	1,579529	37,70	2,652520
160	4	3,3 ₅	1944810	104,73	0,954836	61,15	1,635323
64	5	3,2 ₈	1707870	77,43	1,291489	50,71	1,971998
38	4	3,3 ₅	1509670	63,11	1,584535	46,60	2,145923
150	5	3,2 ₈	1988170	104,93	0,953016	63,42	1,576790

Matice A a ℓ zostavíme z pretvorených koeficientov rovníc opráv (5.36), ktoré sme už vypočítali v príkladoch 5.1 a 5.2. Váhové koeficienty sme vypočítali v tab. 5.4.

$$\mathbf{A}_{(12,2)}^* = \begin{pmatrix} +0,423167 & +0,330622 \\ +0,190620 & -0,420003 \\ -0,126058 & -0,302097 \\ -0,356439 & -0,109084 \\ -0,335260 & +0,255788 \\ -0,017035 & +0,319751 \\ -0,615755 & +0,787938 \\ +0,910604 & +0,413280 \\ +0,922876 & -0,385096 \\ +0,292640 & -0,956223 \\ -0,606571 & -0,795030 \\ -0,998584 & -0,053200 \end{pmatrix}, \quad \ell_{(12,1)}^* = \begin{pmatrix} +3,7 \\ -5,8 \\ +5,3 \\ 0,0 \\ -0,3 \\ -4,2 \\ +17 \\ -11 \\ +11 \\ +26 \\ -13 \\ +6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(12,12)}^* = \begin{pmatrix} 2,141327 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,579529 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,954836 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,291489 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,584535 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,953016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,240441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,652520 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,635323 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,971998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,145923 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,576790 \end{pmatrix}.$$

Vektor opráv približných súradníc bodu 12 je

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}^* \mathbf{P}^* \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{P}^* \ell^* = \begin{pmatrix} dy \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,4_6 \text{ mm} \\ -0,10_0 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

Opravy vypočítame z rovnice

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \ell^* = \begin{pmatrix} +4,7_7^{\text{cc}} \\ -5,3_7^{\text{cc}} \\ +4,9_6^{\text{cc}} \\ -0,8_9^{\text{cc}} \\ -1,1_0^{\text{cc}} \\ -4,2_1^{\text{cc}} \\ +15,5_6 \text{ mm} \\ -8,7_2 \text{ mm} \\ +13,2_3 \text{ mm} \\ +26,6_3 \text{ mm} \\ -14,5_7 \text{ mm} \\ +3,5_4 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

Jednotková stredná chyba je

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-2}} = \sqrt{\frac{3287,01_4}{10}} = 18,1_3 \text{ mm.}$$

Vyrovnané súradnice bodu 12 sú:

$$y = y_0 + dy = 483\,000,91 \text{ m} + 0,002_4 \text{ m} = 483\,000,912_4 \text{ m},$$

$$x = x_0 + dx = 1\,231\,696,05 \text{ m} + 0,000_1 = 1\,231\,696,050_1 \text{ m}.$$

Matica kofaktorov je

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^*{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,123 & 0,008_7 \\ 0,008_7 & 0,150 \end{pmatrix}.$$

Stredné chyby súradníc sú:

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = 18,1_3 \sqrt{0,123} = 6,3_6 \text{ mm},$$

$$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = 18,1_3 \sqrt{0,150} = 7,0_2 \text{ mm}.$$

$$\text{Sigmové skúšky: } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sum_I = \ell^*{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \ell^*{}^T \mathbf{P}^* \ell^* = -49,20_2 + 3336,21_6 = 3287,01_4,$$

$$\sum_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 3287,01_4.$$

Smerník hlavnej polosi strednej elipsy chýb podľa rovnice (6.15) je:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-0,0087)}{0,150 - 0,123} = 18,222^g \dots$$

Keďže znamienko Q_{yx} je kladné hlavná polos prechádza 1. a 3. kvadrantom. Veľkosť polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovnice (6.27)

$$a^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{18,1^2}{2} \left(0,123 + 0,150 + \sqrt{(0,150 - 0,123)^2 + 4 \cdot 0,0087^2} \right) = 49,9_8,$$

$$a = 7,0_7 \text{ mm}.$$

$$b^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{18,1^2}{2} \left(0,123 + 0,150 - \sqrt{(0,150 - 0,123)^2 + 4 \cdot 0,0087^2} \right) = 39,3_3,$$

$$b = 6,2_8 \text{ mm}.$$

Stredná elipsa chýb je zobrazená na obr. 5.7.

5.4 Vyrovnanie pretínania nazad

Dané sú súradnice bodov P_1 až P_n a osnova smerov ψ_1 až ψ_n meraná na bode $P(x, y)$, ktorého súradnice máme vyrovnať (obr. 5.8).

Postup výpočtu je podobný ako pri pretínaní napred. Na rozdiel od neho sa vyskytne pri tomto vyrovnaní ako tretia neznáma orientačný posun z . Zostavíme rovnice opráv. Pre vyrovnaný smerník máme určujúce rovnicu

$$\sigma_i = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x} = f_i(y, x) . \quad (5.45)$$

Opravený pozorovaný smerník bude

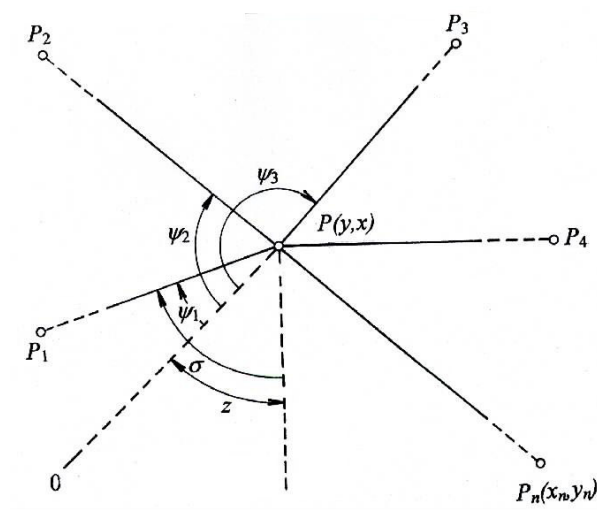
$$\psi_i + z + v_n = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x} . \quad (5.46)$$

Neznáme y , x , z môžeme nahradiť približnými hodnotami

$$y = y_0 + dy , \quad x = x_0 + dx , \quad z = z_0 + dz . \quad (5.47)$$

Po dosadení je

$$\psi_i + z_0 + dz + v_i = f_i(y_0 + dy, x_0 + dx) = \sigma_i . \quad (5.48)$$



Obr. 5.8. Pretínanie nazad

Funkciu $f_i(y, x)$ linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu podobne ako pri pretínaní napred (kap. 5.1)

$$f_i(y_0 + dy, x_0 + dx) = f_i(x_0, y_0) + \frac{\partial f_i(x_0, y_0)}{\partial y_0} dy + \frac{\partial f_i(x_0, y_0)}{\partial x_0} dx . \quad (5.49)$$

Jednotlivé členy sú:

$$f_i(y_0, x_0) = \arctg \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \varphi_i , \text{ je približný smerník}$$

$$\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_0} = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \right)^2} \frac{1}{x_i - x_0} = - \frac{\cos \varphi_i}{s_i} ,$$

$$\frac{\partial f_i(y, x_0)}{\partial x_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \right)^2} \frac{y_i - y_0}{(x_i - x_0)^2} = \frac{\sin \varphi_i}{s_i} .$$

Rovnica (5.48) prejde do tvaru

$$\psi_i + z_0 + dz + v_i = \varphi_i - \rho^{cc} \frac{\cos \varphi_i}{s_i} dy + \rho^{cc} \frac{\sin \varphi_i}{s_i} dx. \quad (5.50)$$

Približný smerník φ_i dostaneme z približných súradníc bodu P_0 . Tieto vypočítame z troch dobre sa pretínajúcich smerov. Porovnaním φ_i s odmeranými ψ_i dostaneme n hodnôt pre orientačný posun

$$\begin{aligned} z'_1 &= \varphi_1 - \psi_1, \\ z'_2 &= \varphi_2 - \psi_2, \\ &\vdots \\ z'_n &= \varphi_n - \psi_n, \\ \sum z' &= \sum \varphi - \sum \psi \\ \frac{\sum z'}{n} &= \frac{\sum \varphi - \sum \psi}{n} = z_0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Vystredením z'_i dostaneme iba približný orientačný posun z_0 na rozdiel od orientácie pri pretínaní napred, lebo z'_i je vypočítané iba z približných smerníkov. Pomocou z_0 orientujeme teraz osnovu smerov a dostaneme odmerané smerníky

$$\alpha_i = \psi_i + z_0. \quad (5.52)$$

Rovnica (5.48) bude mať tvar

$$\alpha_i + dz + v_i = \sigma_i. \quad (5.53)$$

Zavedieme označenia

$$a'_i = -\rho^{cc} \frac{\cos \varphi_i}{s_i}, \quad b'_i = +\rho^{cc} \frac{\sin \varphi_i}{s_i}$$

a približný smerník – (mínus) odmeraný smerník

$$\ell'_i = \varphi_i - \alpha_i. \quad (5.54)$$

Potom dostaneme rovnice opráv

$$v_i = -dz + a'_i dy + b'_i dx + \ell'_i. \quad (5.55)$$

Neznáma dz sa vyskytuje vo všetkých rovniciach opráv. Môžeme ju vylúčiť. Spočítame rovnice (5.55)

$$\sum v = -ndz + \sum a'_i dy + \sum b'_i dx + \sum \ell'_i. \quad (5.56)$$

Pre smery na stanovisku je

$$\sum v = 0.$$

V dôsledku čoho môžeme písať

$$-dz + \frac{\sum a'_i}{n} dy + \frac{\sum b'_i}{n} dx + \frac{\sum \ell'_i}{n} = 0. \quad (5.57)$$

Odčítaním rovnice (5.57) od rovnice (5.55) eliminujeme neznámu dz . Potom

$$v_i = \left(a'_i - \frac{\sum a'_i}{n} \right) dy + \left(b'_i - \frac{\sum b'_i}{n} \right) dx + \ell'_i - \frac{\sum \ell'_i}{n}. \quad (5.58)$$

Odchýlky od aritmetického priemeru označíme

$$a_i = a'_i - \frac{\sum a'}{n}, \quad b_i = b'_i - \frac{\sum b'}{n}, \quad \ell_i = \ell'_i - \frac{\sum \ell'}{n}. \quad (5.59)$$

potom

$$\sum a = 0, \quad \sum b = 0, \quad \sum \ell = 0. \quad (5.60)$$

V prípade pretínania nazad platí už pre absolútne členy ℓ'_i v rovnici (5.56)

$$\sum \ell' = 0.$$

Dokážeme to po spočítaní rovníc (5.54) a (5.52)

$$\sum \ell' = \sum \varphi - \sum \alpha = \sum \varphi - \sum \psi - nz_0.$$

Ak dosadíme sem z rovnice (5.51) $nz_0 = \sum \varphi - \sum \psi$, bude vzťah $\sum \ell' = 0$. Nové koeficienty a , b , ℓ nazývame **redukované**. S týmto označením dostaneme systém rovníc opráv v známom tvare (5.8) z pretínania napred

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 dx + b_1 dy + \ell_1 \\ v_2 = a_2 dx + b_2 dy + \ell_2 \\ \vdots \\ v_i = a_i dx + b_i dy + \ell_i \end{array} \right| p = 1. \quad (5.61)$$

Nakoľko sú všetky smery považované za rovnako presné, dávame všetkým rovnakú váhu $p = 1$. Ďalej postupujeme ako pri vyrovnaní pretínania napred. Z rovníc opráv zostavíme normálne rovnice v maticovom tvare:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = 0 \quad (5.62)$$

a vypočítame vektor neznámych

$$\mathbf{z} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} \quad (5.63)$$

Z vyrovnaných súradníc

$$y = y_0 + dy, \quad x = x_0 + dx$$

vypočítame vyrovnané smerníky σ . Potom nasleduje výpočet opráv z oboch systémov rovníc

$$\begin{array}{l} v_1 = -dz + a'_1 dy + b'_1 dx + \ell'_1, \\ v_2 = -dz + a'_2 dy + b'_2 dx + \ell'_2, \\ \vdots \\ v_i = -dz + a'_i dy + b'_i dx + \ell'_i. \end{array} \quad (5.64)$$

$$\begin{array}{l} v_1 = \sigma_1 - \alpha_1 - dz, \\ v_2 = \sigma_2 - \alpha_2 - dz, \\ \vdots \\ v_n = \sigma_n - \alpha_n - dz, \\ \hline \sum v = \sum \sigma - \sum \alpha - ndz. \end{array} \quad (5.65)$$

Neznámu dz určíme z rovníc (5.65) a (5.57). Pre vyrovnanú osnovu smerníkov na stanovisku platí $\sum v = 0$, preto neznáma dz je

$$dz = \frac{[\sigma - \alpha]}{n} . \quad (5.66)$$

Vyrovnaný smerník σ vypočítame z vyrovnaných súradníc (5.47).

Druhú, presnejšiu hodnotu dz dostaneme z rovnice (5.57)

$$dz = \frac{\sum a'}{n} dy + \frac{\sum b'}{n} dx + \frac{\sum \ell'}{n} . \quad (5.67)$$

Ak obidva systémy opráv súhlasia, vyčíslime na kontrolu sigmové skúšky (5.17).

$$\Sigma_I = \ell^T \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell^T \ell ,$$

$$\Sigma_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} .$$

Za ℓ použijeme hodnoty z rovnice (5.59). Stredná chyba odmeraného smerníka s jednotkovou váhou je

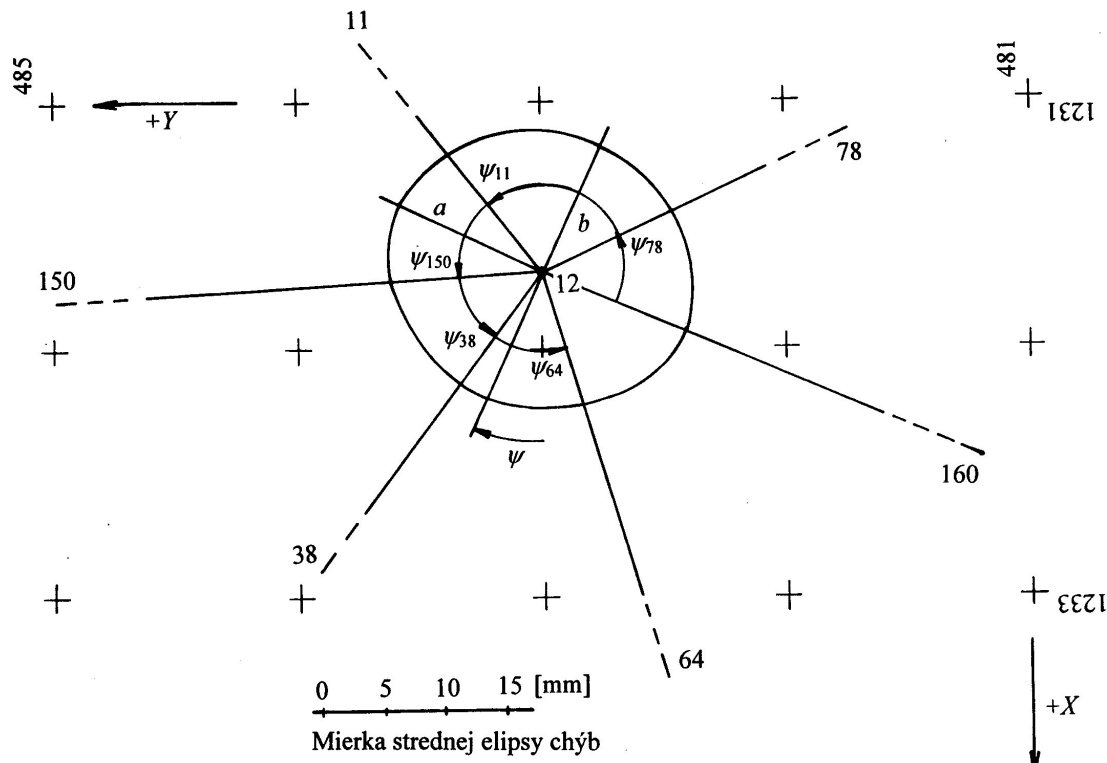
$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-3}} . \quad (5.68)$$

Stredné chyby súradníc sú:

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} , \quad m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} .$$

Určujúce prvky strednej elipsy chýb vypočítame podľa vzťahov (6.14) a (6.27).

Príklad 5.4: Na stanovisku 12 bola odmeraná osnova smerov na vzťažné body 160, 64, 38, 150, 11, 78 (obr. 5.9). Súradnice vzťažných bodov sú uvedené v príklade 5.1. V príklade 4.2 z kombinácie bodov 160, 64, 38 boli vypočítané pretínaním nazad predbežné súradnice bodu 12 $y_{12} = 483\,000,91$ m, $x_{12} = 1\,231\,696,05$ m. Osnova odmeraných smerov je v tab. 5.5.



Obr. 5.9. Vyrovnanie súradníc bodu 12 pretínaním nazad

Vypočítame predbežné smerníky $\varphi_{12,i}$ a dĺžky $s_{12,i}$ ($i = 160, 64, 38, 150, 11, 78$), približný orientačný posun z_0 (5.51), odmerané smerníky a koeficienty pretvorených rovníc opráv a_i, b_i, c_i (tab. 5.5).

Tabuľka 5.5

Číslo bodu	ψ_i	φ_i	$z'_i =$ $\varphi_i - \psi_i$	$\alpha_i =$ $\psi_i + z_0$	s_i	$a'_i =$ $-\rho^{\text{cc}} \frac{\cos \varphi_i}{s_i}$	$b'_i =$ $-\rho^{\text{cc}} \frac{\sin \varphi_i}{s_i}$	$\ell'_i =$ $\varphi_i - \alpha_i$	$a_i =$ $a'_i - \frac{\sum a'_i}{n}$	$b_i =$ $b'_i - \frac{\sum b'_i}{n}$	p_i
i	[g]				[mm]	[mm]		[cc]	[mm]		
160	0,0000 ₀	325,1663 ₇	325,1663 ₇	325,1661 ₃₇	1944,81	+0,126058	0,302097	+2,33	0,089218	+0,314601	1
64	55,9268 ₇	381,0932 ₄	325,1663 ₇	381,0930 ₀₇	1707,87	+0,356439	0,109084	+2,33	+0,319599	+0,121588	1
38	116,3246 ₉	41,4910 ₆	325,1663 ₇	41,4908 ₂₇	1509,67	+0,335260	-0,255788	+2,33	+0,298420	-0,243284	1
150	171,4462 ₃	96,6116 ₀	325,1653 ₇	96,6123 ₆₇	1988,17	+0,017035	-0,319751	-7,67	-0,019805	-0,307247	1
11	232,6028 ₄	157,7702 ₁	325,1673 ₇	157,7689 ₇₇	1185,49	-0,423131	-0,330667	+12,33	-0,459971	-0,318163	1
78	347,7116 ₁	272,8765 ₈	325,1649 ₇	272,8777 ₄₇	1380,25	-0,190620	0,420003	-11,67	-0,227460	+0,432507	1
		$z_0 = \frac{\sum z}{6}$	325,1661 ₃₇		\sum	0,221041	-0,075022	-0,02			
					$\frac{\sum}{n}$	0,36840	-0,012504				

Matice \mathbf{A} a ℓ majú tvar:

$$\mathbf{A}_{(6,2)} = \begin{pmatrix} +0,089218 & +0,314601 \\ +0,319599 & +0,121588 \\ +0,298420 & -0,243284 \\ -0,019805 & -0,307247 \\ -0,459971 & -0,318163 \\ -0,227460 & +0,432507 \end{pmatrix}, \ell_{(6,1)} = \begin{pmatrix} +2,3 \\ +2,3 \\ +2,3 \\ -7,7 \\ +12,3 \\ -11,7 \end{pmatrix}.$$

Vektor opráv približných súradníc bodu 12 je

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \ell = \begin{pmatrix} +1,4_4 \text{ mm} \\ +10,9_2 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané súradnice bodu 12 sú:

$$y = y_0 + dy = 483\,000,91 \text{ m} + 0,001 \text{ m} = 483\,000,91_1 \text{ m},$$

$$x = x_0 + dx = 1\,231\,696,05 \text{ m} + 0,011 \text{ m} = 1\,231\,696,06_1 \text{ m}.$$

Opravy odmeraných smerníkov vypočítame z rovníc (5.61)

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \ell = \begin{pmatrix} +5,8_7 \\ +4,0_9 \\ +0,0_7 \\ -11,0_8 \\ +8,1_6 \\ -7,4_0 \end{pmatrix}.$$

Opravu k približnému orientačnému posunu vypočítame zo vzťahu (5.67)

$$dz = \frac{\sum a'}{n} dy + \frac{\sum b'}{n} dx + \frac{\sum \ell'}{n} = 0,036840.1,439 + (-0,012504.10,925) + (-0,02) = -0,10^{\text{cc}}$$

Sigmové skúšky:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_I = \ell^T \mathbf{A} \mathbf{z} + \ell^T \ell = -67,955 + 363,333 = 295,378,$$

$$\Sigma_{III} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 295,379.$$

Jednotková stredná chyba je

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-2}} = \sqrt{\frac{295,379}{6-2}} = 8,5_9 \text{ mm.}$$

Matica kofaktorov je

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,182 & -0,201_7 \\ -0,201 & 1,844 \end{pmatrix}.$$

Stredné chyby súradníc sú:

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = 8,5_9 \sqrt{2,182} = 12,6_9 \text{ mm,}$$

$$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = 8,5_9 \sqrt{1,844} = 11,6_6 \text{ mm.}$$

Smerník hlavnej polosi strednej elipsy chýb podľa rovnice (6.15) je:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-0,201)}{1,844 - 2,182} = 18,222^\circ.$$

Keďže znamienko Q_{yx} je záporné hlavná polos prechádza 2. a 4. kvadrantom. Veľkosť polosi strednej elipsy chýb vypočítame podľa rovnice (6.27)

$$a^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{8,59^2}{2} \left(2,182 + 1,844 + \sqrt{(1,844 - 2,182)^2 + 4(-0,201)^2} \right) = 167,9119,$$

$$a = 12,9_6 \text{ mm.}$$

$$b^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right) = \frac{8,59^2}{2} \left(2,182 + 1,844 - \sqrt{(1,844 - 2,182)^2 + 4(-0,201)^2} \right) = 129,1585,$$

$$b = 11,3_6 \text{ mm.}$$

Stredná elipsa chýb je zobrazená na obr. 5.9.