

7. TROJUHLNÍKOVÉ (TRIGONOMETRICKÉ) SIETE

Trojuhlníkové siete tvoria vzťahný základ všetkých súvislých meraní. Pôvodný zámer ich využitia bol v katastrálnom mapovaní. Dodnes si uchováva svoj historický názov: Systém Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (S-JTSK). Predstavuje štátnu trigonometrickú sieť. Pre mnohé úlohy, najmä úlohy inžinierskej geodézie jej hustota a presnosť nepostačuje. Účelovo sa budujú miestne (lokálne) trojuhlníkové siete, často iba zavesené na body trigonometrickej siete. Znamená to, že sú pripojené a orientované aspoň na dva body S-JTSK. Miestne siete majú spravidla vyššiu presnosť ako S-JTSK. Presnosť siete je vždy podriadená účelu využitia.

V zásade sa trigonometrické siete budujú terestrickými metódami a metódami globálneho určenia polohy (GPS). V tejto kapitole budú uvedené iba terestrické metódy merania trigonometrických sietí.

Trojuhlníkovú sieť vytvorenú postupnosťou na seba nadväzujúcich trojuhlníkov nazývame trojuhlníkový (trigonometrický) reťazec. Plošná sieť trojuhlníkov si ponecháva názov trojuhlníková (trigonometrická) sieť.

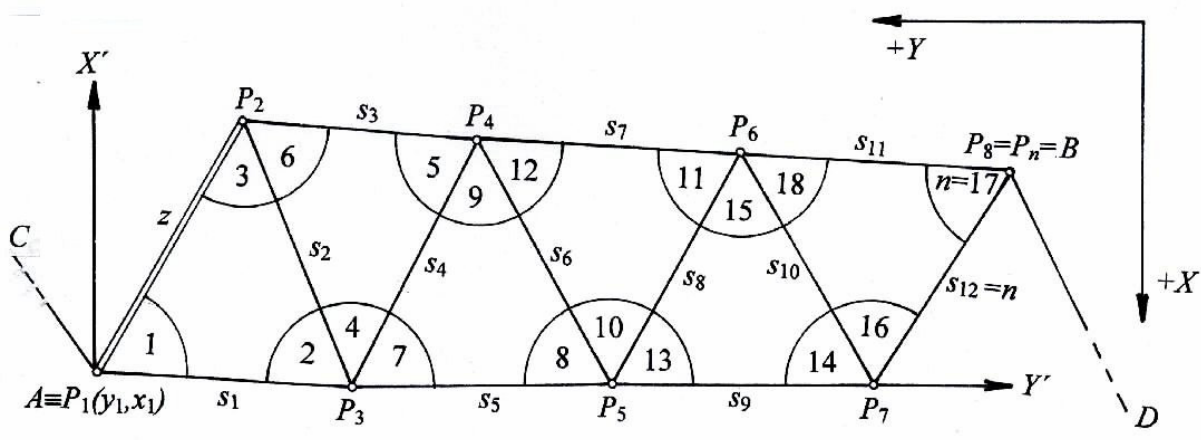
Zhustenie bodového poľa trojuhlníkovými reťazcami umožňuje vytvoriť líniovú sieť o šírke rovné výškam použitých trojuhlníkov, t.j. približne 0,85 s pre rovnostranné trojuhlníky so stranami s . V minulosti bola výhodou tejto metódy možnosť zhustenia bodového poľa **bez nutnosti merania všetkých dĺžok**.

Odmeranie všetkých uhlov a dĺžok v trojuhlníkových sieťach elektronickými teodolitmi predstavuje vyššiu úroveň kvality zhustenia bodového poľa, ktorá je nutná pri tvorbe vytyčovacích sietí plošných i líniových objektov. Trojuhlníkové siete v tvare trojuhlníkových reťazcov často používame i pri iných úlohách geodetickej praxe, v ktorých dôsledne rozlišujeme spôsob výpočtového spracovania trojuhlníkových reťazcov s odmeranými uhlami a dĺžkami.

Variety výpočtového spracovania trojuhlníkových reťazcov sú:

- výpočtom polygónmi,
- výpočtom postupného pretínania napred,
- výpočtom s vyrovnaním MNŠ.

Reťazce iba s odmeranými dĺžkami (trilateračné reťazce) sú spravidla počítané postupným pretínaním. Metódy a) a b) predstavujú aplikácie približného vyrovnania.



Obr. 7.1. Výpočet trojuhlníkového reťazca polygónovou metódou

7.1 Výpočet trojuholníkových reťazcov polygónovou metódou

K určeniu rozmeru reťazca, t. j. k výpočtu dĺžok všetkých strán, je nutné poznať minimálne dĺžku jednej strany zvolenej za základňu a vždy dva uhly v každom trojuholníku. V reťazci na obr. 7.1 bola odmeraná dĺžka základne $z = P_1P_2$ a uhly odvodené z osnov smerov odmeraných na bodoch P_2, P_3, P_5, P_6 a P_n .

Odmeranie ďalšej dĺžky a osnov smerov znamená už určenie nadbytočných meraní. K ich vyrovnaní použijeme separátne riešenie rovníc s podmienkami (podmienkové rovnice). Vyrovnanie uhlov v trojuholníkoch sa rieši rozdelením uhlového uzáveru U rovnomerne na jednotlivé uhly $v_{\omega i} = \frac{1}{3}U$, kde $U = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 200^\circ$. Z odmeraných alebo vyrovnaných uhlov a jednej známej dĺžky vypočítame postupne stykové strany v reťazci ($s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}$ a s_{12}). Ak je známa dĺžka poslednej strany $s_{12} = s_n$, určí sa rozdiel odmeranej \bar{s}_{12} a vypočítanej dĺžky s'_{12} $d_s = \bar{s}_{12} - s'_{12}$ a určia sa opravy dĺžok stykových strán zo vzťahu $v_{si} = i d_s / k$, v ktorom k je počet trojuholníkov v reťazci ($k = 6$) a i je poradové číslo stykovej strany. Napr. oprava pre stranu s_6 na obr. 7.1 je $v_6 = \frac{3}{6} d_s$. Dĺžky obvodových strán ($s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, s_{11}$) vypočítané z neopravených dĺžok stykových strán, majú rovnakú opravu ako po nej nasledujúca styková strana. Súradnice vrcholu reťazca určíme výpočtom uzatvoreného polygónu alebo dvoch polygónov podľa počtu pripojovacích bodov. Vrcholové uhly polygónu sa odvodí buď priamo z meraných osnov smerov alebo súčtom príslušnej trojice, prípadne dvojice vyrovnaných uhlov v trojuholníkoch.

Varianty výpočtov a voľba základní

1) **Miestny súradnicový systém.** Základňa sa volí v strednej stykovej strane alebo dve základne v prvej a poslednej strane. Zo základní a uhlov v trojuholníkoch sa vypočítajú strany v reťazci. Výpočet súradníc bodov je v uzatvorenom polygóne vo zvolenom miestnom súradnicovom systéme.

2) **Dvojica pripojovacích bodov bez uhlovej orientácie.** Pripojovacie body sú P_1, P_8 .

a) Základňa sa zvolí v prostrednej stykovej (alebo obvodovej) strane a jej dĺžka sa odmeria alebo sa zvolí. Predbežné súradnice bodov reťazca sa určia z dvoch vložených polygónov (P_1, P_2, P_4, P_6, P_8 ; P_1, P_3, P_5, P_7, P_8) vypočítaných aplikáciou podobnostnej transformácie na pripojovacie body P_1 a P_8 . Výsledné súradnice reťazca sa vypočítajú vyššie uvedeným postupom.

b) Pri odmeraní dvoch základní na koncoch reťazca (s_1, s_{12}) sa dĺžky vyrovnajú a súradnice bodov reťazca sa vypočítajú postupom 2a.

1) **Dvojice pripojovacích bodov s uhlovými orientáciami.** Pripojovacie body sú $A = P_1, B = P_n$ s orientáciou na body C a D . Odmeria sa dĺžka jednej alebo dvojice základníc, z ktorých sa vypočítajú dĺžky strán trojuholníkového reťazca. Súradnice bodov sa určia dvomi obojstranne pripojenými a orientovanými polygónmi.

Výpočet súradníc bodov reťazca ľubovoľným variantom riešenia polygónmi znamená **porušenie vnútorných vzťahov** v trojuholníkoch, t.j. súčtu uhlov v **trojuholníkoch** a dĺžok stykových strán. Z tohto dôvodu nie je vhodné používať tento typ výpočtu pri budovaní presných **vytyčovacích sietí**. Pre účely zhŕšťovania bodového poľa v 3. triede presnosti tento spôsob výpočtu súradníc bodov postačuje.

7.2 Výpočet trojuholníkových reťazcov postupným pretínaním

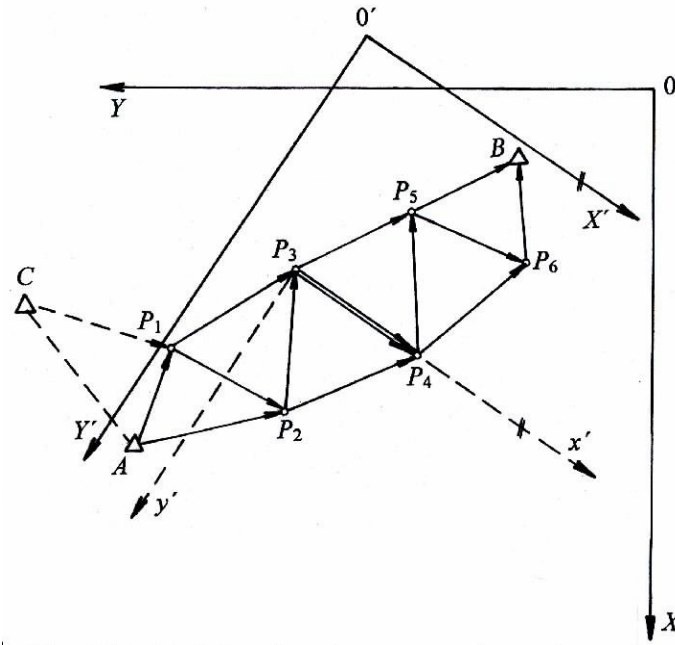
Keď umiestnime miestny súradnicový systém OYX' do jednej zo stykových, či obvodových strán reťazca (alebo s ňou rovnobežne), je možné v tomto systéme odvodiť súradnice ostatných bodov postupným pretínaním napred (obr. 7.2). Na výpočet súradníc v S-JTSK je potrebné poznať

súradnice dvoch pripojovacích bodov k aplikácii podobnostnej transformácie. Dĺžku strany v ktorej bol zvolený miestny súradnicový systém, je možné odmerať alebo zvoliť (napr. 100 m, 1000 m a pod.).

Uvedený spôsob výpočtu, ktorý aplikuje podobnostnú transformáciu s nutným počtom dvoch identických bodov, **zachováva** ako jediný **hodnoty uhlov v trojuholníkoch**, ktoré boli použité k výpočtu pretínania. Tým sa zachovávajú relatívne vzťahy presnosti v reťazci, ktoré zodpovedajú presnosti odmeraných veličín.

V prípade pripojenia reťazca na tri body, sa rieši postupné pretínanie spravidla od dvojice daných pripojovacích bodov. V takomto prípade môžeme vyrovnávať súradnicové uzávery O_y , O_x vypočítané z daných bodov na treťom z pripojovacích bodov. Vyrovnávanie uzáverov vykonáme úmerne k počtu bodov reťazca alebo riešime celú úlohu aplikáciou Helmertovej podobnostnej transformácie.

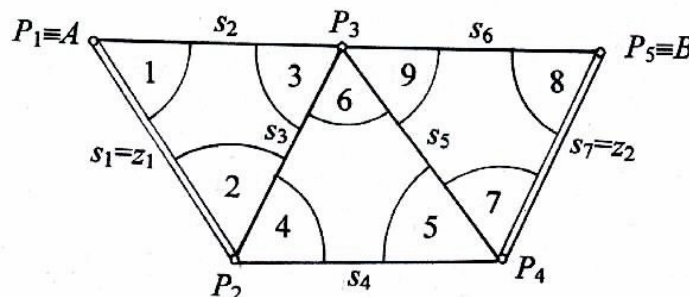
Trilateračné reťazce môžeme riešiť postupným pretínaním z dĺžok.



Obr. 7.2. Výpočet trojuholníkového reťazca postupným pretínaním

7.3 Vyrovnávanie trojuholníkového reťazca MNS, ktorý je určený dvoma základnicami

Napr. v trojuholníkovom reťazci (obr. 7.3) sa odmerajú všetky uhly a na obidvoch koncoch reťazca dĺžky strán s_1 , s_7 , ktoré určujú rozmer reťazca. Úlohou je určiť vyrovnané hodnoty meraných veličín s_i a ω_i . Ak splníme vyrovnávaním všetky existujúce matematické podmienky v súbore odmeraných veličín, dostaneme rovnakú hodnotu pre každú veličinu, ktorá je vypočítaná rôznymi spôsobmi z vyrovnaných uhlov a dĺžok. Merané údaje budeme označovať s pruhom ($\overline{\omega}$, \overline{s}).



Obr. 7.3. Trojuholníkový reťazec určený dvoma základnicami

Riešenie začína zistením počtu nadbytočných veličín r . Na obr. 7.3 bolo odmeraných $n = 11$ prvkov (9 uhlov a 2 dĺžky). Počet nutných prvkov na jednoznačné určenie reťazca je $k = 7$, v prvom trojuholníku 3 prvky a v ďalších dvoch po 2 prvky. Počet podmienok bude

$$r = n - k = 11 - 7 = 4. \quad (7.1)$$

Budeme mať 4 rovnice s podmienkami. Prvé tri budú tzv. „uhlové (trojuholníkové) rovnice“

$$\begin{aligned} 1. \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 200^\circ &= 0, \\ 2. \quad \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 - 200^\circ &= 0, \\ 3. \quad \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 - 200^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Štvrtá podmienková rovnica bude tzv. „stranová (základňová) rovnica“, ktorá zabezpečuje, aby dĺžka ľubovoľnej strany mala vždy rovnakú hodnotu, nech ju odvodzujeme akýmkoľvek výpočtom. V prípade zobrazenom na obr. 7.3, by sa mala dĺžka s_7 postupne odvodená sínusovou vetou z dĺžky s_1 , presne rovnať odmeranej dĺžke \bar{s}_7 . Jednotlivé dĺžky budú

$$s_3 = s_1 \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_3}, \quad s_5 = s_3 \frac{\sin \omega_4}{\sin \omega_5}, \quad s_7 = s_5 \frac{\sin \omega_9}{\sin \omega_8}.$$

Keď potom postupne dosadíme vypočítané dĺžky do prvej rovnice bude

$$s_7 = \frac{\sin \omega_1 \sin \omega_4 \sin \omega_9}{\sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_8} s_1$$

a po úprave dostaneme stranovú rovnicu s podmienkou

$$4. \quad \frac{\sin \omega_1 \sin \omega_4 \sin \omega_9 s_1}{\sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_8 s_7} = 1. \quad (7.3)$$

Ak by boli zadané súradnice bodov A , D , pribudli by ďalšie dve súradnicové podmienkové rovnice a ak by na týchto bodoch boli aj dané smerníky, pribudla by ešte naviac smerníková podmienková rovnica.

Odmerané hodnoty $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_9$ a \bar{s}_1, \bar{s}_7 však vplyvom meračských chýb nebudú spĺňať podmienkové rovnice (7.2) a (7.3). Dosadením odmeraných hodnôt do podmienkových rovníc (rovníc závislosti) vypočítame hodnoty uzáverov U_1 až U_4 . Pretvorené podmienkové rovnice pre prvé tri uhlové rovnice, keď $a_i = b_i = c_i = 1$, budú

$$\begin{aligned} 1. \quad v_1 + v_2 + v_3 + U_1 &= 0, & \text{pričom} & \quad U_1 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - 200^\circ, \\ 2. \quad v_4 + v_5 + v_6 + U_2 &= 0, & & \quad U_2 = \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 - 200^\circ, \\ 3. \quad v_7 + v_8 + v_9 + U_3 &= 0, & & \quad U_3 = \bar{\omega}_7 + \bar{\omega}_8 + \bar{\omega}_9 - 200^\circ. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Odvedenie 4. pretvorenej stranovej podmienkovej rovnice si rozvedieme podrobnejšie. Najskôr stranovú rovnicu (7.3) zlogaritmujeme

$$\log \sin \bar{\omega}_1 + \log \sin \bar{\omega}_4 + \log \sin \bar{\omega}_9 - \log \sin \bar{\omega}_3 - \log \sin \bar{\omega}_5 - \log \sin \bar{\omega}_8 + \log \bar{s}_1 - \log \bar{s}_7 = 0$$

a potom linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu, s obmedzením sa len na prvé členy rozvoja, pričom

$$\omega_i = \bar{\omega}_i + v_i, \quad i = 1, \dots, 9 \text{ a } s_1 = \bar{s}_1 + v_{10}, \quad s_7 = \bar{s}_7 + v_{11}.$$

Všeobecné členy Taylorovho radu pre uhly a dĺžky budú

$$\begin{aligned} \log \sin \omega_i &= \log \sin(\bar{\omega}_i + v_i) = \log \sin \bar{\omega}_i + \frac{\partial \log \sin \bar{\omega}_i}{\partial \bar{\omega}_i} = \log \sin \bar{\omega}_i + \frac{\log e}{\sin \bar{\omega}_i} \cos \bar{\omega}_i d\omega_i = \\ &= \log \sin \bar{\omega}_i + M \cot g \bar{\omega}_i d\omega_i . \end{aligned}$$

Pretože $d\omega_i = v_i$ a oprava v_i bude vyjadrená v „grádových sekundách“ ($^{\text{cc}}$), budú koeficienty pri uhlových opravách $d_i = M \frac{\cot g \bar{\omega}_i}{\rho^{\text{cc}}}$, kde $M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4343$, e je základ prirodzených logaritmov a $\rho^{\text{cc}} = 636\,620^{\text{cc}}$.

Podobne odvodíme koeficienty d_j pre dĺžky

$$\log s_j = \log(\bar{s}_j + v_j) = \log \bar{s}_j + \frac{\partial \log \bar{s}_j}{\partial \bar{s}_j} = \log \bar{s}_j + \frac{\log e}{\bar{s}_j} ds_j = \log \bar{s}_j + \frac{M}{\bar{s}_j} ds_j .$$

Koeficienty stranovej rovnice s podmienkou budú $d_i = M \frac{\cot g \bar{\omega}_i}{\rho^{\text{cc}}}$ a $d_j = \frac{M}{\bar{s}_j}$, kde $i = 1, 9$ a $j = 10, 11$.

Všeobecný tvar stranovej pretvorenej rovnice s podmienkou bude

$$d_1 v_1 + d_3 v_3 + d_4 v_4 + d_5 v_5 + d_8 v_8 + d_9 v_9 + d_{10} v_{10} + d_{11} v_{11} + U_4 = 0 ,$$

pričom

$$U'_4 = \log \sin \bar{\omega}_1 + \log \sin \bar{\omega}_4 + \log \sin \bar{\omega}_9 - \log \sin \bar{\omega}_3 - \log \sin \bar{\omega}_5 - \log \sin \bar{\omega}_8 + \log \bar{s}_1 - \log \bar{s}_7 \quad (7.5)$$

Ak za koeficienty d_i a d_j dosadíme odvodené výrazy, dostaneme

$$\begin{aligned} &M \frac{\cot g \bar{\omega}_1}{\rho^{\text{cc}}} v_1 - M \frac{\cot g \bar{\omega}_3}{\rho^{\text{cc}}} v_3 + M \frac{\cot g \bar{\omega}_4}{\rho^{\text{cc}}} v_4 - M \frac{\cot g \bar{\omega}_5}{\rho^{\text{cc}}} v_5 - M \frac{\cot g \bar{\omega}_8}{\rho^{\text{cc}}} v_8 + \\ &+ M \frac{\cot g \bar{\omega}_9}{\rho^{\text{cc}}} v_9 + \frac{M}{\bar{s}_1} v_{10} - \frac{M}{\bar{s}_7} v_{11} + U'_4 = 0 . \end{aligned}$$

Rovnicu zjednodušíme vynásobením zlomkom $\frac{\rho^{\text{cc}}}{M}$ a 4. stranovú pretvorenú podmienkovú rovnicu dostaneme v tvare

$$\begin{aligned} &4. \cot g \bar{\omega}_1 v_1 - \cot g \bar{\omega}_3 v_3 + \cot g \bar{\omega}_4 v_4 - \cot g \bar{\omega}_5 v_5 - \cot g \bar{\omega}_8 v_8 + \cot g \bar{\omega}_9 v_9 + \\ &+ \frac{\rho^{\text{cc}}}{\bar{s}_1} v_{10} - \frac{\rho^{\text{cc}}}{\bar{s}_7} v_{11} + \underbrace{\frac{\rho^{\text{cc}}}{M} U'_4}_{U_4} = 0 . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Koeficienty pretvorenej podmienkovej rovnice môžeme určiť priamo linearizáciou vzťahov (7.3). Označíme

$$\begin{aligned} \sin \omega_1 \sin \omega_4 \sin \omega_9 s_1 &= A , \\ \sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_8 s_7 &= B . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Vzťahy linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu a dostaneme

$$\frac{\partial A}{\partial \omega_i} = \cos \omega_1 \sin \omega_1 \sin \omega_4 \sin \omega_9 s_1 \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_1} = A \cot g \omega_1. \quad \text{Analogicky dostaneme aj ostatné}$$

parciálne derivácie. Linearizovaná rovnica (7.3) bude

$$\begin{aligned} & A \cot g \omega_1 v_1 + A \cot g \omega_4 v_4 + A \cot g \omega_9 v_9 + \frac{A}{s_1} \rho^{\text{cc}} v_{10} - B \cot g \omega_3 v_3 - \\ & - B \cot g \omega_5 v_5 - B \cot g \omega_8 v_8 - \frac{B}{s_7} \rho^{\text{cc}} v_{11} + \underbrace{(A - B) \rho^{\text{cc}}}_{U_4} = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Vzhľadom na to, že budeme počítať s veľkými hodnotami koeficientov opráv, rovnica (7.8) predelíme vhodnou konštatou.

Pretvorené podmienkové rovnice v maticovom zápise budú:

$$\mathbf{A}_{(4,11)}^T \mathbf{v}_{(11,1)} + \mathbf{u}_{(4,1)} = 0, \quad (7.9)$$

kde

$$\mathbf{A}_{(11,4)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & b_4 & 0 & d_4 \\ 0 & b_5 & 0 & d_5 \\ 0 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_7 & 0 \\ 0 & 0 & c_8 & d_8 \\ 0 & 0 & c_9 & d_9 \\ 0 & 0 & 0 & d_{10} \\ 0 & 0 & 0 & d_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(4,1)} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{(4,1)} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix}.$$

Váhové koeficienty volíme podľa požiadavky, aby odchýlky v pozdĺžnom smere (p) spôsobené chybami v meraní dĺžok m_s a v priečnom smere (q) spôsobené chybami v meraní uhlov boli na rovnakej úrovni

$$p = q,$$

$$m_s = sm_\omega. \quad (7.10)$$

Keď položíme

$$p_s = \frac{c}{m_s^2} = 1 \quad \text{potom} \quad p_\omega = \frac{1}{\left(\frac{sm_\omega}{\rho^{\text{cc}}} \right)^2}. \quad (7.11)$$

Váhové koeficienty ležia na diagonále matice $\mathbf{P}_{(11,11)}$. Členy matice \mathbf{P} mimo diagonály majú nulovú hodnotu.

Pri vyrovnaní MNŠ používame Langrangeov postup, v ktorom k hlavnej podmienke $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ pripájame vedľajšiu podmienku vyjadrenú rovnicou (7.9) rozšírenú o Langrangeové faktory – koreláty

$$F = \mathbf{v}_{(1,11)}^T \mathbf{P}_{(11,11)} \mathbf{v}_{(11,1)} - 2 \mathbf{k}_{(1,4)}^T (\mathbf{A}_{(4,11)}^T \mathbf{v}_{(11,1)} + \mathbf{u}_{(4,1)}) = \min. \quad (7.12)$$

Funkcia F bude minimálna, ak

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{P}_{(11,11)}\mathbf{v}_{(11,1)} - 2\mathbf{A}_{(11,4)}\mathbf{k}_{(4,1)} = 0 . \quad (7.13)$$

Rovnice opráv

$$\mathbf{v}_{(11,1)} = \mathbf{P}_{(11,11)}^{-1}\mathbf{A}_{(11,4)}\mathbf{k}_{(4,1)} \quad (7.14)$$

dosadíme do pretvorených podmienkových rovníc

$$\mathbf{A}_{(4,11)}^T\mathbf{P}_{(11,11)}^{-1}\mathbf{A}_{(11,4)}\mathbf{k}_{(4,1)} + \mathbf{u}_{(4,1)} = \mathbf{N}_{(4,4)}\mathbf{k}_{(4,1)} + \mathbf{u}_{(4,1)} = 0 , \quad (7.15)$$

z ktorých vypočítame koreláty

$$\mathbf{k}_{(4,1)} = -\mathbf{N}_{(4,4)}^{-1}\mathbf{u}_{(4,1)} . \quad (7.16)$$

Koreláty dosadíme do rovnice (7.14) a vyčíslíme opravy k jednotlivým odmeraným uhlom a dĺžkam. Kvalitu vstupných meraných veličín posúdime výpočtom jednotkovej strednej chyby zo vzťahu

$$\sigma_0 = E(\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{r}} , \quad (7.17)$$

kde r je počet podmienkových rovníc (podľa obr. 7.3 $r = 4$).

Rovnice (7.15) obsahujú koeficienty normálnych rovníc, ktoré vyjadruje matica $\mathbf{N}_{(4,4)}$

$$\begin{aligned} \sum \frac{aa}{p}K_1 + \sum \frac{ab}{p}K_2 + \sum \frac{ac}{p}K_3 + \sum \frac{ad}{p}K_4 + U_1 &= 0, \\ \sum \frac{ab}{p}K_1 + \sum \frac{bb}{p}K_2 + \sum \frac{bc}{p}K_3 + \sum \frac{bd}{p}K_4 + U_2 &= 0, \\ \sum \frac{ac}{p}K_1 + \sum \frac{bc}{p}K_2 + \sum \frac{cc}{p}K_3 + \sum \frac{cd}{p}K_4 + U_3 &= 0, \\ \sum \frac{ad}{p}K_1 + \sum \frac{bd}{p}K_2 + \sum \frac{cd}{p}K_3 + \sum \frac{dd}{p}K_4 + U_4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Rovnice opráv (7.14) majú všeobecný tvar

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1}K_1 + \frac{b_1}{p_1}K_2 + \frac{c_1}{p_1}K_3 + \frac{d_1}{p_1}K_4, \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2}K_1 + \frac{b_2}{p_2}K_2 + \frac{c_2}{p_2}K_3 + \frac{d_2}{p_2}K_4, \\ &\vdots \\ v_{11} &= \frac{a_{11}}{p_{11}}K_1 + \frac{b_{11}}{p_{11}}K_2 + \frac{c_{11}}{p_{11}}K_3 + \frac{d_{11}}{p_{11}}K_4. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Vypočítané opravy v_i skontrolujeme výrazom

$$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = -\mathbf{k}^T\mathbf{u} . \quad (7.20)$$

Ak kontrola potvrdí správnosť výpočtu opráv, pokračujeme výpočtom vyrovnaných uhlov a dĺžok. Z nich odvodíme buď polygón alebo pretínaním napred vyrovnané súradnice bodov v trojuholníkovom reťazci.

Rovnicu (7.20) dostaneme tak, že do funkcie $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ dosadíme za \mathbf{v} rovnicu (7.14), ktorú najprv transponujeme

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{k}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = -\mathbf{k}^T \mathbf{u}, \quad (7.21)$$

z rovnice (7.15) je $\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = -\mathbf{u}$ a $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{E}$ je jednotková matica.

Kovariančnú maticu vyrovnaných hodnôt vektora opráv vypočítame aplikáciou zákona hromadenia chýb $\mathbf{B} \mathbf{C}_u \mathbf{B}^T$.

Vektor \mathbf{B} nájdeme rovnicou opráv

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (7.22)$$

Kovariančnú maticu \mathbf{C}_u odvodíme zo vzťahu

$$\mathbf{C}_{uu} = E(\mathbf{u} \mathbf{u}^T) = E(\mathbf{A}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{A}) = E\left(\mathbf{A}^T \underbrace{\mathbf{v} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{v}^T}_{\mathbf{E}} \mathbf{A}\right) = \underbrace{E(\mathbf{v} \mathbf{P} \mathbf{v}^T)}_{\sigma_0^2} \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}}_{\mathbf{N}} = \sigma_0^2 \mathbf{N}. \quad (7.23)$$

Kovariančná matica opráv potom bude

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{vv} &= -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C}_{uu} * -\left[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})\right]^T = \\ &= -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}) * -\left[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1}\right]^T = \\ &= \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Kovariančnú maticu vyrovnaných uhlov a dĺžok vypočítame zo vzťahu (jeho odvodenie nájdeme v mojej učebnici: Vyrovnávací počet)

$$\mathbf{C}_{LL} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{LL} = \sigma_0^2 \left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \right]. \quad (7.25)$$

Stredné chyby vyrovnaných hodnôt odmeraných uhlov a dĺžok potom budú

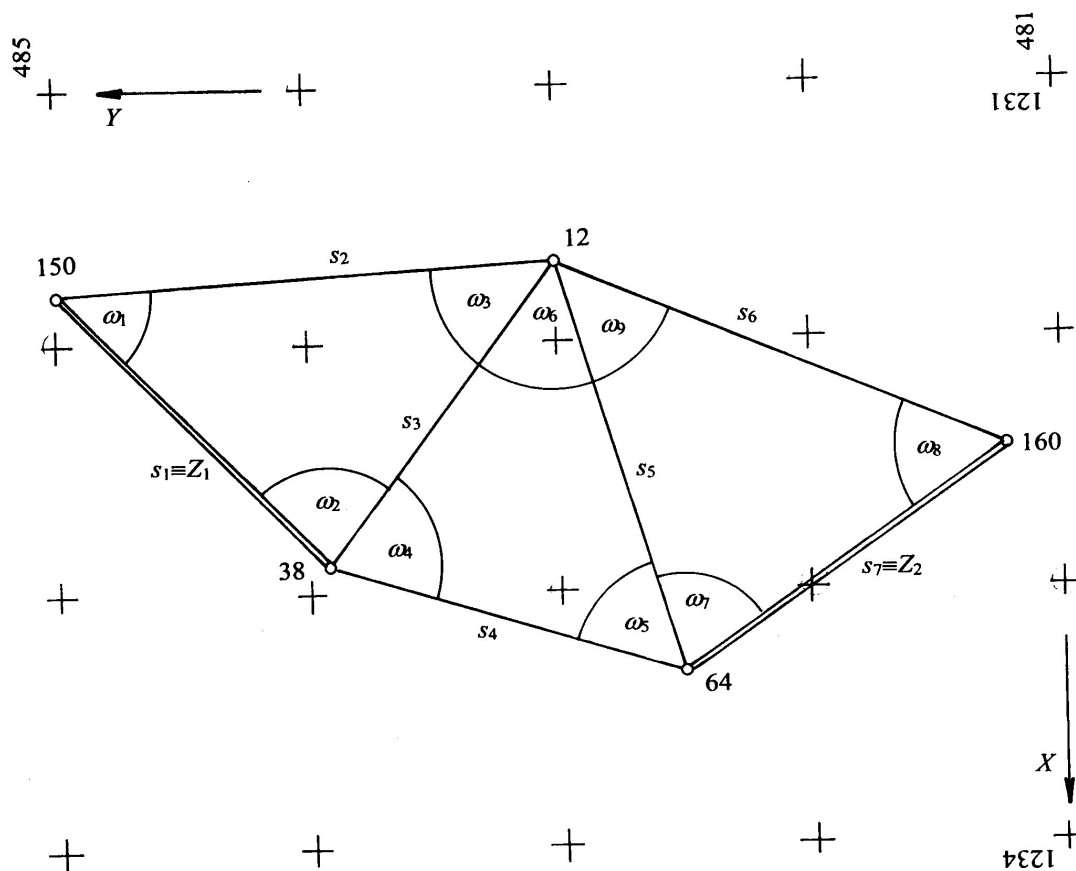
$$\begin{aligned} \sigma_{\omega_i} &= \sigma_0 \sqrt{Q_{ii}}, \quad \text{kde } i = 1, 9, \\ \sigma_{sj} &= \sigma_0 \sqrt{Q_{jj}}, \quad \text{kde } j = 10, 11. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Príklad 7.1: V trojuholníkovom reťazci (obr. 7.4) boli odmerané dĺžky \bar{s}_1, \bar{s}_7 a uhly $\bar{\omega}_1$ až $\bar{\omega}_9$ (tab. 7.1). Uhly a dĺžky boli odmerané so strednými chybami $m_\omega = 3''$ a $m_s = 5$ mm.

Odmerané uhly a dĺžky v trojuholníkovom reťazci

Tabuľka 7.1

Trojuholník	1	2		3		Základnice	
	[g]					[m]	
$\overline{\omega}_1$	54,1190 ₅	$\overline{\omega}_4$	77,4017 ₁	$\overline{\omega}_7$	80,7694 ₈	$z_1 = \overline{s}_1$	1530,339
$\overline{\omega}_2$	90,7605 ₆	$\overline{\omega}_5$	62,2010 ₃	$\overline{\omega}_8$	63,3026 ₅	$z_2 = \overline{s}_7$	1568,080
$\overline{\omega}_3$	55,1210 ₄	$\overline{\omega}_6$	60,3978 ₂	$\overline{\omega}_9$	55,9268 ₇		
$U_1 = \sum \overline{\omega} - 200^g$	+6,5 ^{cc}	U_2	+5,6 ^{cc}	U_3	-10,0 ^{cc}		



Obr. 7.4. Trojuholníkový reťazec určený uhlami a dvoma základnicami

Uzáver stranovej rovnici (7.5) je

$$\begin{aligned}
 U_4 &= \log \sin \bar{\omega}_1 + \log \sin \bar{\omega}_4 + \log \sin \bar{\omega}_9 - \log \sin \bar{\omega}_3 - \log \sin \bar{\omega}_5 - \log \sin \bar{\omega}_8 + \log \bar{s}_1 - \log \bar{s}_7 = \\
 &= -0,12415977 - 0,02795654 - 0,11363309 + 0,11825061 + 0,08152334 + 0,07654460 + \\
 &\quad + 3,18478765 - 3,19536822 = -0,00001142, \quad (10^{U_4} = 0,9999737).
 \end{aligned}$$

(Poznámka: $U_4 = -0,0264$ mm je vypočítaná podľa vzťahu (7.3).)

Výpočet koeficientov opráv pretvorenej podmienkovej stranovej rovnice (7.6):

$$\begin{aligned}
 &\cot g \bar{\omega}_1 v_1 - \cot g \bar{\omega}_3 v_3 + \cot g \bar{\omega}_4 v_4 - \cot g \bar{\omega}_5 v_5 - \cot g \bar{\omega}_8 v_8 + \cot g \bar{\omega}_9 v_9 + \\
 &+ \frac{\rho^{cc}}{s_1} v_{10} - \frac{\rho^{cc}}{s_7} v_{11} + \underbrace{\frac{\rho^{cc}}{M} U_4'}_{U_4} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0,878300v_1 - 0,850798v_3 + 0,370674v_4 - 0,674993v_5 - 0,650093v_8 + 0,829209v_9 + \\
 &+ 0,415999v_{10} - 0,405987v_{11} - 16,7107 = 0.
 \end{aligned}$$

Výpočet koeficientov opráv pretvorenej podmienkovej rovnice podľa (7.8):

$$\sin \bar{\omega}_1 \sin \bar{\omega}_4 \sin \bar{\omega}_9 \bar{s}_1 = A = 0,751346 \cdot 0,937656 \cdot 0,769780 \cdot 1530339 \text{ mm} = 829922,97 \text{ mm},$$

$$\sin \bar{\omega}_3 \sin \bar{\omega}_5 \sin \bar{\omega}_8 \bar{s}_7 = B = 0,761639 \cdot 0,828851 \cdot 0,838408 \cdot 1568080 \text{ mm} = 829944,91 \text{ mm}.$$

$$A - B = -21,942 \text{ mm}. \quad \frac{A}{B} = 0,9999735.$$

Rovnicu (7.8) upravíme predelením konštantou 10^6 :

$$\left(A \cot g \bar{\omega}_1 v_{1+} + A \cot g \bar{\omega}_4 v_4 + A \cot g \bar{\omega}_9 v_9 + \frac{A}{\bar{s}_1} \rho^{cc} v_{10} - B \cot g \bar{\omega}_3 v_3 - B \cot g \bar{\omega}_5 v_5 - \right. \\ \left. - B \cot g \bar{\omega}_8 v_8 - \frac{B}{\bar{s}_7} \rho^{cc} v_{11} + (A - B) \rho^{cc} \right) \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 0,$$

$$0,728922 v_1 + 0,307631 v_4 + 0,688179 v_9 + 0,345247 v_{10} - 0,706115 v_3 - \\ - 0,560207 v_5 - 0,539541 v_8 - 0,336947 v_{11} - 13,9687 = 0.$$

Môžeme sa presvedčiť o kompaktilite koeficientov v oboch postupoch ich určenia predelením zodpovedajúcich si koeficientov, ktorý je 1,2049₁.

Matica koeficientov pretvorených podmienkových rovníc **A** a vektor uzáverov **u** podľa rovníc (7.2) a (7.6) budú mať tvary

$$\mathbf{A}_{(11,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,878300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0,850798 \\ 0 & 1 & 0 & +0,370674 \\ 0 & 1 & 0 & -0,674993 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,650093 \\ 0 & 0 & 1 & +0,829209 \\ 0 & 0 & 0 & +0,415999 \\ 0 & 0 & 0 & -0,405987 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 5,6 \\ -10,0 \\ -16,7107 \end{pmatrix}.$$

Váhové koeficienty vypočítame podľa vzťahov (7.11), keď za \bar{s} použijeme $\bar{s} = 1550$ m.

$$p_s = 1, \quad p_\omega = \frac{c}{(\bar{s} m_\omega / \rho^{cc})^2} = \frac{25}{(1550000 \cdot 3^{cc} / \rho^{cc})^2} = 0,4686. \text{ Prvky stopy matice váhových} \\ \text{koeficientov } \mathbf{P} \text{ tr}(\mathbf{P}) \text{ budú } (0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 0,4686 \ 1 \ 1).$$

Koreláty vypočítané podľa rovnice (7.16) sú

$$\mathbf{k} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1,036 \\ -0,651 \\ 1,430 \\ 2,206 \end{pmatrix}.$$

Výpočet opráv preskúšame výpočtom vzťahov (7.9) a (7.20)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = -\mathbf{k}^T \mathbf{u} = 64,541 = 64,541.$$

Opravy odmeraných uhlov a dĺžok podľa rovnice (7.14) sú:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} +1,925^{\text{cc}} \\ -2,210^{\text{cc}} \\ -6,215^{\text{cc}} \\ +0,356^{\text{cc}} \\ -4,567^{\text{cc}} \\ -1,389^{\text{cc}} \\ +3,052^{\text{cc}} \\ -0,001^{\text{cc}} \\ +6,956 \\ +0,918 \text{ mm} \\ -0,896 \text{ mm} \end{pmatrix},$$

Vyrovnané uhly a dĺžky v trojuholníkovom reťazci

Tabuľka 7.2

Trojuholník	1		2		3		základnica
	[g]						[m]
$\omega_1 = \overline{\omega}_1 + v_1$	54,1192 ₄	ω_4	77,4017 ₅	ω_7	80,7697 ₈	s_1	1530,340 m
$\omega_2 = \overline{\omega}_2 + v_2$	90,7603 ₄	ω_5	62,2005 ₇	ω_8	63,3026 ₅	s_7	1568,079 m
$\omega_3 = \overline{\omega}_3 + v_3$	55,1204 ₂	ω_6	60,3976 ₈	ω_9	55,9275 ₇		
$\sum \omega$	200,0000 ₀		200,0000 ₀		200,0000 ₀		

Na výpočet stredných chýb vyrovnaných uhlov a dĺžok vypočítame jednotkovú strednú chybu σ_0 a kovariančnú maticu vyrovnaných uhlov a dĺžok (7.25), z ktorej uvidíme prvky stopy kofaktorov $tr(\mathbf{Q}_{os})$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}} = \sqrt{\frac{64,541}{4}} = 4,0_2$$

$$\mathbf{Q}_{os} = \left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \right] =$$

$$= (0,936 \ 1,423 \ 0,947 \ 1,279 \ 1,211 \ 1,416 \ 1,420 \ 1,098 \ 1,041 \ 0,976 \ 0,977).$$

Stredné chyby vyrovnaných hodnôt odmeraných uhlov a dĺžok vypočítame podľa vzťahov (7.26)

$$\sigma_{\omega 1} = \sigma_0 \sqrt{Q_{11}} = 4,02 \sqrt{0,936} = 3,9^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 7} = \sigma_0 \sqrt{Q_{77}} = 4,02 \sqrt{1,420} = 3,9^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 2} = \sigma_0 \sqrt{Q_{22}} = 4,02 \sqrt{1,423} = 4,8^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 8} = \sigma_0 \sqrt{Q_{88}} = 4,02 \sqrt{1,098} = 4,2^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 3} = \sigma_0 \sqrt{Q_{33}} = 4,02 \sqrt{0,947} = 3,9^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 9} = \sigma_0 \sqrt{Q_{99}} = 4,02 \sqrt{1,041} = 4,1^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{\omega 4} = \sigma_0 \sqrt{Q_{44}} = 4,02 \sqrt{1,279} = 4,5^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{s1} = \sigma_0 \sqrt{Q_{10}} = 4,02 \sqrt{0,976} = 4,0 \text{ mm},$$

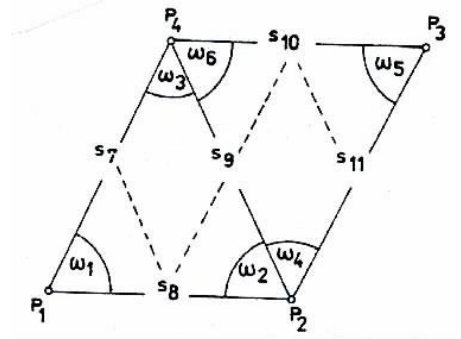
$$\sigma_{\omega 5} = \sigma_0 \sqrt{Q_{55}} = 4,02 \sqrt{1,211} = 4,4^{\text{cc}},$$

$$\sigma_{s2} = \sigma_0 \sqrt{Q_{11}} = 4,02 \sqrt{0,977} = 4,0 \text{ mm}.$$

$$\sigma_{\omega 6} = \sigma_0 \sqrt{Q_{66}} = 4,02 \sqrt{1,416} = 4,8^{\text{cc}},$$

7.4 Vyrovnávanie trojuholníkovej siete odmeranej všetkými uhlami a dĺžkami

Vyrovnávanie trojuholníkovej siete s odmeranými všetkými uhlami a dĺžkami si ukážeme na vyrovnaní siete v tvare trojuholníkového reťazca. Princíp vyrovnania je platný pre plošné siete rôznej konfigurácie.



Obr. 7.5. Vyrovnávanie trojuholníkovej siete v tvare trojuholníkového reťazca

V trigonometrickej sieti boli odmerané uhly ω_1 až ω_6 a dĺžky s_7 až s_{11} . Medzi odmeranými uhlami a dĺžkami platia rovnice s podmienkami

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 200^\circ &= 0 \dots = U_1, \\ \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 - 200^\circ &= 0 \dots = U_2, \\ s_8 \sin \omega_2 - s_7 \sin \omega_3 &= 0 \dots = U_3, \\ s_8 \sin \omega_1 - s_9 \sin \omega_3 &= 0 \dots = U_4, \\ s_{10} \sin \omega_5 - s_9 \sin \omega_4 &= 0 \dots = U_5, \\ s_{10} \sin \omega_6 - s_{11} \sin \omega_4 &= 0 \dots = U_6.\end{aligned}\tag{7.27}$$

Dosadením odmeraných hodnôt do rovníc s podmienkami (7.27) vypočítame hodnoty uzáverov U_1 až U_6 . Rovnice s podmienkami budú splnené vtedy, ak k odmeraným uhlom a dĺžkam priradíme opravy v_i , spĺňajúce podmienku MNŠ $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$.

$$\begin{aligned}\omega_i &= \bar{\omega}_i + v_i, \\ s_i &= \bar{s}_i + v_i,\end{aligned}\tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}\varphi_a [(\bar{\omega}_1 + v_1) + (\bar{\omega}_2 + v_2) + (\bar{\omega}_3 + v_3) - 200^\circ] &= 0, \\ \varphi_b [(\bar{\omega}_4 + v_4) + (\bar{\omega}_5 + v_5) + (\bar{\omega}_6 + v_6) - 200^\circ] &= 0, \\ \varphi_c [(\bar{s}_8 + v_8) \sin(\bar{\omega}_2 + v_2) - (\bar{s}_7 + v_7) \sin(\bar{\omega}_3 + v_3)] &= 0, \\ \varphi_d [(\bar{s}_8 + v_8) \sin(\bar{\omega}_1 + v_1) - (\bar{s}_9 + v_9) \sin(\bar{\omega}_3 + v_3)] &= 0, \\ \varphi_e [(\bar{s}_{10} + v_{10}) \sin(\bar{\omega}_5 + v_5) - (\bar{s}_9 + v_9) \sin(\bar{\omega}_4 + v_4)] &= 0, \\ \varphi_f [(\bar{s}_{10} + v_{10}) \sin(\bar{\omega}_6 + v_6) - (\bar{s}_{11} + v_{11}) \sin(\bar{\omega}_4 + v_4)] &= 0.\end{aligned}\tag{7.29}$$

Linearizáciou rovníc (7.29) rozvojom do Taylorovho radu vypočítame koeficienty pretvorených podmienkových rovníc, keď dĺžky s dosadzujeme v mm:

$$\varphi_a(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3) - 200 = U_1, \quad a_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial(\bar{\omega}_1)} = 1, \quad a_2 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial(\bar{\omega}_2)} = 1, \quad a_3 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial(\bar{\omega}_3)} = 1,$$

⋮

$$\varphi_c(\bar{s}_8 \sin \bar{\omega}_2 - \bar{s}_7 \sin \bar{\omega}_3) = U_3,$$

$$c_8 = \frac{\partial \varphi_c}{\partial \bar{s}_8} = \sin \bar{\omega}_2, \quad c_2 = \frac{\partial \varphi_c}{\partial(\bar{\omega}_2)} = \frac{s_8 \cos \bar{\omega}_2}{\rho^{cc}},$$

$$c_7 = \frac{\partial \varphi_c}{\partial \bar{s}_7} = -\sin \bar{\omega}_3, \quad c_3 = \frac{\partial \varphi_c}{\partial(\bar{\omega}_3)} = -\frac{s_8 \cos \bar{\omega}_3}{\rho^{cc}}.$$

⋮

Pretvorené podmienkové rovnice majú tvar:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + U_1 &= 0 \\ b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + U_2 &= 0 \\ c_8 v_8 + c_2 v_2 + c_7 v_7 + c_3 v_3 + U_3 &= 0 \\ d_8 v_8 + d_1 v_1 + d_9 v_9 + d_3 v_3 + U_4 &= 0 \\ e_{10} v_{10} + e_5 v_5 + e_9 v_9 + e_4 v_4 + U_5 &= 0 \\ f_{10} v_{10} + f_6 v_6 + f_{11} v_{11} + f_4 v_4 + U_6 &= 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Pretvorené podmienkové rovnice v maticovom zápise budú:

$$\mathbf{A}_{(6,11)}^T \mathbf{v}_{(11,1)} + \mathbf{u}_{(6,1)} = 0, \quad (7.31)$$

kde

$$\mathbf{A}_{(11,6)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & e_4 & f_4 \\ 0 & b_5 & 0 & 0 & e_5 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & f_6 \\ 0 & 0 & c_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_8 & d_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_9 & e_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{10} & f_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{pmatrix}.$$

Pri vyrovnaní MNŠ používame Lagrangeov postup (ako v kap. 7.3), v ktorom k hlavnej podmienke $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ pripájame vedľajšiu podmienku vyjadrenú rovnicou (7.31), rozšírenú o Lagrangeové faktory – koreláty:

$$F = \mathbf{v}_{(1,11)}^T \mathbf{P}_{(11,11)} \mathbf{v}_{(11,1)} - 2 \mathbf{k}_{(1,6)}^T (\mathbf{A}_{(6,11)}^T \mathbf{v}_{(11,1)} + \mathbf{u}_{(6,1)}) = \min. \quad (7.32)$$

Váhové koeficienty v rovnici (7.32) určíme podľa rovnice (7.11). Ďalej postupujeme v riešení Lagrangeovej funkcie rovnako, ako v kap. 7.3.

Jednotkovú strednú chybu vypočítame zo vzťahu:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{r}}, \quad (7.33)$$

kde r je počet podmienkových rovníc (podľa obr. 7.4 $r = 6$).

Prekontrolujeme správnosť výpočtu opráv podľa rovnice (7.20). Ak kontrola potvrdí správnosť výpočtu opráv, vyrovnáme merané uhly a dĺžky a vypočítame súradnice bodov v trojuholníkovom reťazci polygónom alebo pretínaním napred.

Stredné chyby vyrovnaných hodnôt odmeraných uhlov a dĺžok vypočítame podľa rovníc (7.26) s využitím matice kofaktorov \mathbf{Q}_{LL} (7.25).

Príklad 7.2: V trojuholníkovom reťazci (obr. 7.6) boli odmerané uhly ω_1 až ω_6 a dĺžky s_7 až s_{11} . Uhly a dĺžky boli odmerané so strednými chybami $m_\omega = 3''$ a $m_s = 5$ mm.

Odmerané uhly a dĺžky v trojuholníkovom reťazci

Tabuľka 7.3

Trojuholník	1		2	1		2	
	[g]			[m]			
$\overline{\omega}_1$	54,1190 ₅	$\overline{\omega}_4$	77,4017 ₁	\overline{s}_7	1988,174	\overline{s}_{10}	1707,860
$\overline{\omega}_2$	90,7605 ₆	$\overline{\omega}_5$	62,2010 ₃	\overline{s}_8	1530,339	\overline{s}_{11}	1480,211
$\overline{\omega}_3$	55,1210 ₄	$\overline{\omega}_6$	60,3978 ₂	\overline{s}_9	1509,675		
$U_1 = \sum \omega - 200^{\text{g}}$	+6,5 ^{cc}	U_2	+5,6 ^{cc}				

Vypočítame stranové uzávery (7.27):

$$\bar{s}_8 \sin \bar{\omega}_2 - \bar{s}_7 \sin \bar{\omega}_3 = 1530,339.0,989487 - 1988,174.0,761639 = -0,021_5 \text{ m},$$

$$\bar{s}_8 \sin \bar{\omega}_1 - \bar{s}_9 \sin \bar{\omega}_3 = 1530,339.0,751347 - 1509,675.0,761639 = -0,012_7 \text{ m},$$

$$\bar{s}_{10} \sin \bar{\omega}_5 - \bar{s}_9 \sin \bar{\omega}_4 = 1707,860.0,828851 - 1509,675.0,937656 = +0,006_5 \text{ m},$$

$$\bar{s}_{10} \sin \bar{\omega}_6 - \bar{s}_{11} \sin \bar{\omega}_4 = 1707,860.0,812674 - 1480,211.0,937656 = +0,005_3 \text{ m}.$$

Vypočítame koeficienty

$$c_8 = \sin \bar{\omega}_2 = 0,989487, \quad c_7 = -\sin \bar{\omega}_3 = -0,761639, \quad c_2 = \bar{s}_8 \cos \bar{\omega}_2 = 0,347654,$$

$$c_3 = -\bar{s}_7 \cos \bar{\omega}_3 = -2,023718,$$

$$d_8 = \sin \bar{\omega}_1 = 0,751346, \quad d_9 = -\sin \bar{\omega}_3 = -0,761639, \quad d_1 = \bar{s}_8 \cos \bar{\omega}_1 = 1,586320,$$

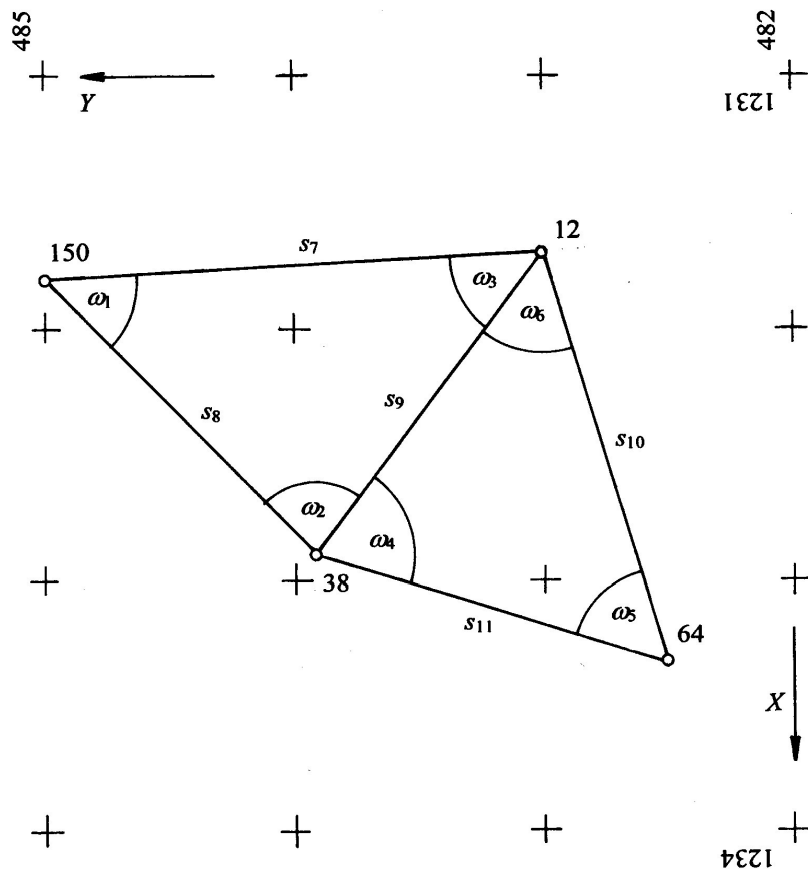
$$d_3 = -\bar{s}_9 \cos \bar{\omega}_3 = -1,536665,$$

$$e_{10} = \sin \bar{\omega}_5 = 0,828851, \quad e_9 = -\sin \bar{\omega}_4 = -0,937656, \quad e_2 = \bar{s}_{10} \cos \bar{\omega}_2 = 1,500887,$$

$$e_4 = -\bar{s}_9 \cos \bar{\omega}_4 = -0,824213,$$

$$f_{10} = \sin \bar{\omega}_6 = 0,812674, \quad f_{11} = -\sin \bar{\omega}_4 = -0,937656, \quad f_6 = \bar{s}_{10} \cos \bar{\omega}_6 = 1,563258,$$

$$f_4 = -\bar{s}_{11} \cos \bar{\omega}_4 = -0,808127.$$



Obr. 7.6. Vyrovnávanie uhlov a dĺžok

Členy matice koeficientov pretvorených podmienkových rovníc a vektor uzáverov sú:

$$\mathbf{A}_{(11,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,586320 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & +0,347654 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2,023718 & -1,536665 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,824213 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +1,500887 & -0,808127 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1,563258 \\ 0 & 0 & -0,761639 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +0,989487 & +0,751346 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,761639 & -0,937656 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +0,828851 & +0,812674 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,937656 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} +6,5^{\text{cc}} \\ +5,6^{\text{cc}} \\ -21,5 \text{ mm} \\ -12,7 \text{ mm} \\ +6,5 \text{ mm} \\ +5,3 \text{ mm} \end{pmatrix}.$$

Váhové koeficienty vypočítame s použitím vzťahov (7.10) a (7.11) keď položíme $p_{si} = 1$. Ukážka váhového koeficientu pre uhol $\bar{\omega}_1$ je

$$p_{\omega 1} = \frac{c}{\left(\frac{s_7 + s_8}{2} \cdot m_{\omega} / \rho^{\text{cc}} \right)^2} = \frac{25}{\left(\frac{1988 + 1530}{2} 1000 / \rho^{\text{cc}} \right)^2} = 0,3638.$$

Prvky stopy matice váhových koeficientov ($\text{tr}(\mathbf{P})$) sú

(0,3638 0,4876 0,3682 0,5040 0,4434 0,4354 1 1 1 1 1)

Koreláty vypočítame podľa rovníc (7.16) sú:

$$\mathbf{k} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} +0,567 \\ -0,427 \\ +2,235 \\ -0,510 \\ -0,863 \\ -0,733 \end{pmatrix}.$$

Opravy odmeraných uhlov a dĺžok podľa rovnice (7.14) sú:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -0,639 \\ +2,755 \\ -8,616 \\ +0,563 \\ -2,549 \\ -3,614 \\ -1,702 \\ +1,829 \\ +1,197 \\ -1,311 \\ +0,687 \end{pmatrix}.$$

Výpočet opráv preskúšame výpočtom vzťahov (7.9) a (7.20):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7,1 \cdot 10^{-15} \\ -8,9 \cdot 10^{-15} \\ -1,8 \cdot 10^{-15} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = -\mathbf{k}^T \mathbf{u} = 49,778 = 49,778.$$

Vyrovnané uhly a dĺžky v trojuholníkovom reťazci

Tabuľka 7.4

Trojuholník	1		2	1		2	
	[g]			[m]			
$\omega_1 = \overline{\omega}_1 + v_1$	54,1189 ₉	ω_4	77,4017 ₁	s_7	1988,172	s_{10}	1707,859
$\omega_2 = \overline{\omega}_2 + v_2$	90,7608 ₄	ω_5	62,2007 ₈	s_8	1530,341	s_{11}	1480,212
$\omega_3 = \overline{\omega}_3 + v_3$	55,1201 ₈	ω_6	60,3974 ₆	s_9	1509,676		
$\sum \omega$	+200,0000 ₁		200,0000 ₁				

Na výpočet stredných chýb vyrovnaných uhlov a dĺžok vypočítame jednotkovú strednú chybu σ_0 (7.17) a kovariančnú maticu vyrovnaných uhlov a dĺžok (7.25), z ktorej uvedieme prvky stopy kofaktorov \mathbf{Q}_{os}

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}} = \sqrt{\frac{49,778}{6}} = 2,88$$

$$tr \left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \right] =$$

$$= (0,195 \ 0,405 \ 0,213 \ 0,527 \ 0,134 \ 0,393 \ 0,849 \ 0,895 \ 0,790 \ 0,743 \ 0,879).$$

Stredné chyby vyrovnaných hodnôt odmeraných uhlov a dĺžok vypočítame podľa vzťahov (7.26)

$$\sigma_{\omega 1} = \sigma_0 \sqrt{Q_{11}} = 2,88 \sqrt{0,195} = 1,3^{\text{cc}}, \quad \sigma_{s7} = \sigma_0 \sqrt{Q_{77}} = 2,88 \sqrt{0,849} = 2,6 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\omega 2} = \sigma_0 \sqrt{Q_{22}} = 2,88 \sqrt{0,405} = 1,8^{\text{cc}}, \quad \sigma_{s8} = \sigma_0 \sqrt{Q_{88}} = 2,88 \sqrt{0,895} = 2,7 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\omega 3} = \sigma_0 \sqrt{Q_{33}} = 2,88 \sqrt{0,213} = 1,3^{\text{cc}}, \quad \sigma_{s9} = \sigma_0 \sqrt{Q_{99}} = 2,88 \sqrt{0,790} = 2,6 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\omega 4} = \sigma_0 \sqrt{Q_{44}} = 2,88 \sqrt{0,527} = 2,1^{\text{cc}}, \quad \sigma_{s10} = \sigma_0 \sqrt{Q_{10}} = 2,88 \sqrt{0,743} = 2,5 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\omega 5} = \sigma_0 \sqrt{Q_{55}} = 2,88 \sqrt{0,134} = 1,1^{\text{cc}}, \quad \sigma_{s11} = \sigma_0 \sqrt{Q_{11}} = 2,88 \sqrt{0,879} = 2,7 \text{ mm}.$$

$$\sigma_{\omega 6} = \sigma_0 \sqrt{Q_{66}} = 2,88 \sqrt{0,393} = 1,8^{\text{cc}},$$