

6. STREDNÁ ELIPSA CHÝB

Na rozdiel od kapitoly 4.4 učebnice Bitterer, L.: Vyrovňovací počet, kde sú parametre elipsy strednej chyby odvodené aplikáciou zákona hromadenia stredných chýb, v tejto kapitole odvodíme parametre strednej elipsy chýb zo vzťahov riešenia normálnych rovníc.

V kap. 5.1 sú uvedené vzťahy na výpočet stredných chýb vyrovnaných súradníc bodu $P(y, x)$ m_y a m_x (5.16) $m_y = \delta_0 \sqrt{Q_{yy}}$ a $m_x = \delta_0 \sqrt{Q_{xx}}$, kde Q_{yy} a Q_{xx} sú váhové koeficienty, ktoré ležia na diagonále inverznej matice váhových koeficientov (5.17) a σ_0 je jednotková stredná chyba (aposteriórna)

$$\mathbf{Q}_{(2,2)} = \mathbf{N}_{(2,2)}^{-1} = \begin{vmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{vmatrix}.$$

Váhové koeficienty vieme tiež vypočítať riešením neznámych dy a dx z rovnice (5.12) $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \ell = 0$.

S ohľadom na popis vektorov a matíc napr. v kap. 5.1, majú normálne rovnice tvar

$$\begin{aligned} (\sum p_{aa}) dy + (\sum p_{ab}) dx + \sum p_{a\ell} &= 0, \\ (\sum p_{ab}) dy + (\sum p_{bb}) dx + \sum p_{b\ell} &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Neznáme dy a dx vypočítame eliminačnou metódou. Prvú rovnicu vynásobíme koeficientom $-\frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{aa}}$ a pripočítame k druhej rovnici (6.1). Druhá rovnicu vynásobíme koeficientom $-\frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{bb}}$ a pripočítame k prvej rovnici (6.1). Striedavo vylúčime dy a dx

$$\begin{aligned} \left(\sum p_{bb} - \frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{aa}} \sum p_{ab} \right) dx + \left(\sum p_{b\ell} - \frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{aa}} \sum p_{a\ell} \right) &= 0, \\ \left(\sum p_{aa} - \frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{bb}} \sum p_{ab} \right) dy + \left(\sum p_{a\ell} - \frac{\sum p_{ab}}{\sum p_{bb}} \sum p_{b\ell} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Zjednodušený zápis rovníc (6.2) bude

$$\begin{aligned} (\sum p_{bb.1}) dx + \sum p_{b\ell.1} &= 0, \\ (\sum p_{aa.1}) dy + \sum p_{a\ell.1} &= 0. \end{aligned}$$

Podľa vety „koeficient neznámej v poslednej redukcii je zároveň jej váhou“, platí pre váhy neznámych

$$\begin{aligned} p_y &= \sum p_{aa.1} = \frac{1}{Q_{yy}}, \\ p_x &= \sum p_{bb.1} = \frac{1}{Q_{xx}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Rovnice (5.16) môžeme potom tiež napísať

$$m_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum p_{aa.1}}},$$

$$m_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum pbb.1}} . \quad (6.4)$$

Upravme prvé členy rovníc (6.2)

$$\begin{aligned} \sum paa.1 &= \frac{\sum paa \sum pbb - \sum pab \sum pab}{\sum pbb} = \frac{B}{\sum pbb} , \\ \sum pbb.1 &= \frac{\sum paa \sum pbb - \sum pab \sum pab}{\sum paa} = \frac{B}{\sum paa} . \end{aligned} \quad (6.5)$$

Rovnice (6.4), ktoré vyjadrujú stredné chyby súradníc s ohľadom na rovnice (6.5) zapíšeme

$$m_y^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum pbb}{B} = \sigma_0^2 Q_{yy} , \quad m_x^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum paa}{B} = \sigma_0^2 Q_{xx} . \quad (6.6)$$

Stredná polohová chyba bude

$$m_p^2 = m_y^2 + m_x^2 = \frac{\sigma_0^2}{B} (\sum pbb + \sum paa) . \quad (6.7)$$

Ak za koeficienty a , b , z kap. 5.1 dosadíme

$$a_i = \frac{\cos \varphi_i}{s_i} \rho^{\text{cc}} \quad \text{a} \quad b_i = -\frac{\sin \varphi_i}{s_i} \rho^{\text{cc}} , \text{ dostaneme pre výraz v zátvorke rovnice (6.7)}$$

$$\begin{aligned} \sum paa + \sum pbb &= \rho^2 \left(\frac{p_1 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1)}{s_1^2} + \frac{p_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)}{s_2^2} + \dots \right) = \\ &= \rho^2 \left(\frac{p_1}{s_1^2} + \frac{p_2}{s_2^2} + \dots + \frac{p_n}{s_n^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Podobne je možné upraviť aj výraz B v menovateli rovnice (6.7) i keď bude zložitejší.

Konštantná hodnota m_p v rovnici (6.7) znamená, že bude splnená pre rôzne hodnoty stredných chýb súradníc. Výraz v zátvorke rovnice (6.7) je závislý iba od vzdialeností s_i odmeraných po určený bod. Podobne aj výraz B je závislý od vzdialeností a smerníkov φ_i .

Chceme vedieť, ako sa mení stredná chyba v jednotlivých smeroch a kde leží jej maximálna hodnota. Predpokladáme, že extrémne hodnoty ležia na súradnicových osiach pootočeného súradnicového systému Y', X' o uhol ψ oproti systému Y, X (obr. 6.1). V ďalších vzťahoch v záujme zjednodušenia rovníc nebudeme uvádzať váhový koeficient p .

Pre túto polohu potočeného súradnicového systému o uhol ψ budú smerové koeficienty

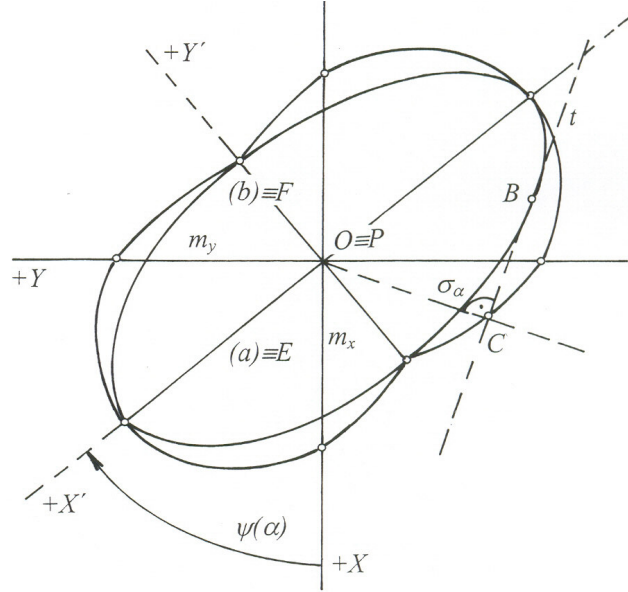
$$a' = \rho \frac{\cos(\varphi - \psi)}{s}, \quad b' = -\rho \frac{\sin(\varphi - \psi)}{s} \quad (6.9)$$

a ich súčet štvorcov

$$\sum a'a' = \rho^2 \left(\frac{\cos^2(\varphi_1 - \psi)}{s_1^2} + \frac{\cos^2(\varphi_2 - \psi)}{s_2^2} + \dots + \frac{\cos^2(\varphi_n - \psi)}{s_n^2} \right) .$$

Najprv rovnice (6.9) rozvineme podľa pravidiel goniometrických funkcií pre rozdiel uhlov, umocníme a spočítame

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{\rho}{s} (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) = a \cos \psi - b \sin \psi, \\
a'a' &= a^2 \cos^2 \psi - 2ab \sin \psi \cos \psi + b^2 \sin^2 \psi, \\
\sum a'a' &= (\sum aa) \cos^2 \psi - (\sum ab) \sin 2\psi + (\sum bb) \sin^2 \psi.
\end{aligned} \tag{6.10}$$



Obr. 6.1. Stredná elipsa chýb

Podobne dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum b'b' &= \rho^2 \left(\frac{\sin^2(\varphi_1 - \psi)}{s_1^2} + \frac{\sin^2(\varphi_2 - \psi)}{s_2^2} + \dots + \frac{\sin^2(\varphi_n - \psi)}{s_n^2} \right), \\
b' &= -\frac{\rho}{s} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) = b \cos \psi + a \sin \psi, \\
b'b' &= b^2 \cos^2 \psi + 2ab \sin \psi \cos \psi + a^2 \sin^2 \psi, \\
\sum b'b' &= (\sum bb) \cos^2 \psi + (\sum ab) \sin 2\psi + (\sum aa) \sin^2 \psi.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Stredné chyby pre pootočený súradnicový systém Y', X' o uhol ψ budú

$$\begin{aligned}
m_{y'}^2 &= \sigma_0^2 \frac{\sum b'b'}{B} = \frac{\sigma_0^2}{B} ((\sum bb) \cos^2 \psi + (\sum aa) \sin^2 \psi + (\sum ab) \sin 2\psi), \\
m_{x'}^2 &= \sigma_0^2 \frac{\sum a'a'}{B} = \frac{\sigma_0^2}{B} ((\sum aa) \cos^2 \psi + (\sum bb) \sin^2 \psi - (\sum ab) \sin 2\psi).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Aby hodnoty stredných chýb na posunutých osiach mali extrémne hodnoty, ich prvá derivácia musí byť rovná nule. Za tým účelom postačí derivovať čitateľov v rovniciach (6.12)

$$\frac{\partial \sum a'a'}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \sum b'b'}{\partial \psi} = 0. \tag{6.13}$$

Po derivácii rovníc (6.10) a (6.11) dostaneme

$$\frac{\partial \sum a'a'}{\partial \psi} = -2(\sum aa)\cos\psi \sin\psi - 2(\sum ab)\cos 2\psi + 2(\sum bb)\sin\psi \cos\psi = 0.$$

Po úprave oboch derivácií vypočítame uhol ψ

$$\begin{aligned} & -(\sum aa)\sin 2\psi - 2(\sum ab)\cos 2\psi + (\sum bb)\sin 2\psi = \\ & = (\sum bb - \sum aa)\sin 2\psi - 2(\sum ab)\cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\sum ab}{\sum bb - \sum aa}. \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial \sum b'b'}{\partial \psi} = -2(\sum bb)\sin\psi \cos\psi + 2(\sum aa)\sin\psi \cos\psi + 2(\sum ab)\cos 2\psi = 0,$$

$$\begin{aligned} & = -(\sum bb)\sin 2\psi + (\sum aa)\sin 2\psi + 2(\sum ab)\cos 2\psi = \\ & = (\sum aa - \sum bb)\sin 2\psi + 2(\sum ab)\cos 2\psi = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\sum ab}{\sum bb - \sum aa}. \quad (6.14b)$$

Uhol pootočenia hlavnej osi strednej elipsy chýb bude

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sum ab}{\sum bb - \sum aa} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{2\sum ab}{B}}{\frac{\sum bb - \sum aa}{B}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}}. \quad (6.15)$$

V záujme vyriešenia rovníc (6.12) upravme goniometrické funkcie tak, aby sme využili funkcie (6.15). Do rovníc (6.12) dosadíme výrazy

$$\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos 2\psi}{2}, \quad \cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2}, \text{ keď} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\sum ab}{\sum bb - \sum aa} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sum bb - \sum aa)^2 + 4(\sum ab)^2}{(\sum bb - \sum aa)^2}}} = \\ &= \frac{\sum bb - \sum aa}{\sqrt{(\sum bb - \sum aa)^2 + 4(\sum ab)^2}} = \frac{\sum bb - \sum aa}{C}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\text{kde } C = \sqrt{(\sum bb - \sum aa)^2 + 4(\sum ab)^2}.$$

Z rovníc (6.14) a (6.17) vyjadríme funkciu

$$\sin 2\psi = \operatorname{tg} 2\psi \cos 2\psi = \frac{2\sum ab}{\sum bb - \sum aa} \frac{\sum bb - \sum aa}{C} = \frac{2\sum ab}{C}. \quad (6.18)$$

Ďalšie funkcie sú

$$\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos 2\psi}{2} = \frac{1 - \frac{\sum bb - \sum aa}{C}}{2} = \frac{C - \sum bb + \sum aa}{2C},$$

$$\cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2} = \frac{1 + \frac{\sum bb - \sum aa}{C}}{2} = \frac{C + \sum bb - \sum aa}{2C}. \quad (6.19)$$

Rovnice (6.10) a (6.11) po dosadení funkcií budú

$$\begin{aligned} \sum a'a' &= \sum aa \left(\frac{C + \sum bb - \sum aa}{2C} \right) - \sum ab \frac{2\sum ab}{C} + \sum bb \left(\frac{C - \sum bb + \sum aa}{2C} \right) = \\ &= \frac{C(\sum aa + \sum bb) + \sum aa \sum bb - (\sum aa)^2 - 4(\sum ab)^2 - (\sum bb)^2 + \sum aa \sum bb}{2C} = \\ &= \frac{C(\sum aa + \sum bb) - C^2}{2C} = \frac{\sum aa + \sum bb - C}{2}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\text{keď } -C^2 = -(\sum bb)^2 - (\sum aa)^2 + 2\sum aa \sum bb - 4(\sum ab)^2.$$

Analogicky určíme

$$\sum b'b' = \frac{\sum aa + \sum bb + C}{2}. \quad (6.21)$$

Stredné chyby v novom súradnicovom systéme podľa rovníc (6.6) budú

$$m_y^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum aa + \sum bb + C}{2B}, \quad (6.22)$$

$$m_x^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum aa + \sum bb - C}{2B}$$

Stredná polohová chyba bude rovnaká ako v rovnici (6.7)

$$m_p^2 = m_y^2 + m_x^2 = \frac{\sigma_0^2}{B} (\sum aa + \sum bb).$$

Hodnota výrazu C (6.17) je vždy kladná. Maximum z rovníc (6.22) bude mať tá rovnica, v ktorej je $+C$

$$a^2 = m_{max}^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum aa + \sum bb + C}{2B} \text{ pre smer hlavnej poloosi } \psi_1 = \psi \quad (6.23)$$

a minimum s $-C$

$$b^2 = m_{min}^2 = \sigma_0^2 \frac{\sum aa + \sum bb - C}{2B} \text{ pre smer vedľajšej poloosi } \psi_2 = \psi + 100^\circ. \quad (6.24)$$

Elipsa vyjadrená parametrami a, b v rovniciach (6.23) a (6.24) sa nazýva **stredná elipsa chýb**.

Ak budeme postupne meniť smer ψ súradnicového systému elipsy strednej chyby a hodnoty m_y, m_x vypočítané z rovníc úpätnice elipsy

$$m_y^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi, \quad (6.25)$$

$$m_x^2 = a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi ,$$

zobrazíme na súradnicových osiach, dostaneme uzavretú krivku, ktorá zobrazuje strednú chybu určenia polohy bodu vo všetkých smeroch. Grafické zobrazenie rozloženia strednej chyby okolo určitého bodu zjednodušene zobrazujeme elipsou s parametrami a, b , z ktorej je odvodená úpätnica.

Ak pri vyrovnaní používame maticové riešenie, je výhodné vypočítať poloosi elipsy stredných chýb a, b použitím váhových koeficientov (5.16)

$$m_y^2 = \sigma_0^2 Q_{yy} , \quad m_x^2 = \sigma_0^2 Q_{xx} . \quad (6.26)$$

Podľa rovnice (6.4) je $Q_{yy} = \frac{\sum bb}{B}$ a $Q_{xx} = \frac{\sum aa}{B}$. Po dosadení Q_{yy} a Q_{xx} do rovníc (6.23) a (6.24) dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 &= \sigma_0^2 \frac{Q_{yy} + Q_{xx} + Q}{2} , \\ b^2 &= \sigma_0^2 \frac{Q_{yy} + Q_{xx} - Q}{2} , \end{aligned} \quad (6.27)$$

pričom je vždy $Q > 0$ (kladné) a rovná sa

$$Q^2 = (Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4(Q_{yx})^2 . \quad (6.28)$$

Smer ψ vyjadríme vzťahom

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} . \quad (6.29)$$

Kvadrant smerníka hlavnej poloosi strednej elipsy chýb závisí od znamienka Q_{yx} v matici $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$ (kovariancie σ_{yx}). Ak hodnota Q_{yx} je kladná, smer hlavnej poloosi strednej elipsy chýb je 1. alebo 3. kvadrante. Ak hodnota Q_{yx} je záporná je 2. alebo 4. kvadrante.

Pomocou rovníc (6.27) vypočítame parametre elipsy a, b aj pre body vyrovnané skupinovo, napr. pri výpočte polygónu s vyrovnaním MNS. Pre prvý bod použijeme váhové koeficienty Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} . Pre druhý bod Q_{33}, Q_{44}, Q_{34} a podobne aj pre ďalšie body.

Ak $a = b$ ide o strednú kružnicu chýb s polomerom $r = a = b$.

Príklady na výpočet parametrov strednej elipsy chýb nájdeme v kapitole 5.