

4. ZÁKLADNÉ TRIGONOMETRICKÉ ÚLOHY

4.1 Podprogram na výpočet smerníka a dĺžky strany v jazyku fortran

Podprogram je zostavený na výpočet v dvojitej presnosti (DOUBLE PRECISION)

C

C – PODPROGRAM SMERNI (VYPOCET SMERNIKA A DLZKY STRANY)

C

```
                SUBROUTINE SMERNI (DY,DX, SIGMA,S)
                DOUBLE PRECISION FI,RADIAN,DY,DX,SIGMA,S
                NCR=1
                NLP=3
                RADIAN=200./3.1415927
                FI=DATAN(DY+1.D-6/(DX+1.D-6))*RADIAN
                IF(FI.LT.0.)GO TO 20
                IF(DY.LT.0.) GO TO 10
                SIGMA=FI
                GO TO 40
10  SIGMA=FI+200.
                GO TO 40
20  IF(DY.GT.0.)GO TO 30
                SIGMA=400.+FI
                GO TO 40
30  SIGMA=200.+FI
40  CONTINUE
                S=DSQRT(DY*DY+DX*DX)
                RETURN
                END
```

Kde $DY = Y_2 - Y_1$, $DX = X_2 - X_1$, $RADIAN = 200/\pi$.

Podprogram je v jazyku H Fortran.

4.2 Výpočet smerníka bez testovania kvadrantu

Podprogram môžeme zapísať ako jednopříkazovú funkciu.

$$SIGMA = DATAN ((DY + 1.D^{-6})/(DX+1.D^{-6}))*RADIAN+(-0.5*DSIGN(1,DY)-0.5*DSIGN(1,DY)*DSIGN(1,DX)+1)*200 \quad (4.1)$$

Platí napr.: $DSIGN(1,DY) = 1$,

$$DSIGN(1,-DY) = -1. \quad (4.2)$$

Výrazy v zátvorkách s funkciou DSIGN sú v jednotlivých kvadrantoch:

I. kvadrant $(-0,5 \ -0,5 \ +1).200 = 0$	$\sigma = \varphi$,	
II. kvadrant $(-0,5 \ +0,5 \ +1).200 = 1.200$	$\sigma = -\varphi + 200$,	
III. kvadrant $(+0,5 \ -0,5 \ +1).200 = 1.200$	$\sigma = \varphi + 200$,	(4.3)
IV. kvadrant $(+0,5 \ +0,5 \ +1).200 = 2.200$	$\sigma = -\varphi + 400$.	

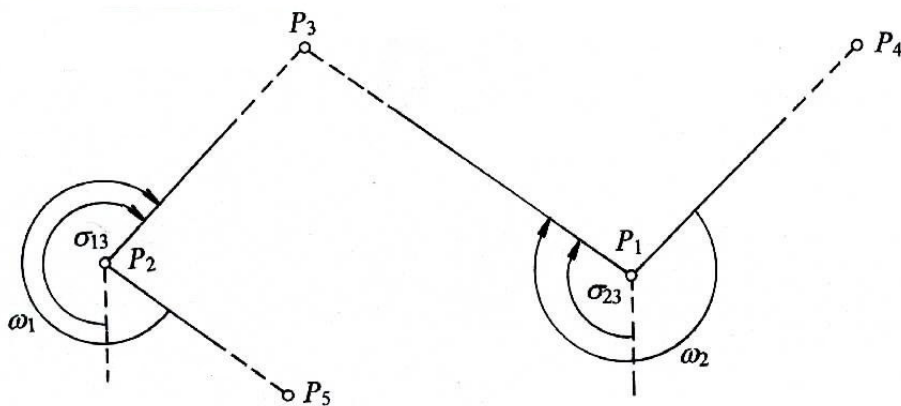
4.3 Pretínanie napred smerníkmi

Nový bod je určený smerníkmi z dvoch daných bodov. (obr. 4.1). Dané sú súradnice bodov P_1 , P_2 , P_4 , P_5 a uhly ω_1 , ω_2 . Vypočítame súradnice bodu P_3 . Pre smerníky σ_{13} , σ_{23} môžeme písať tieto rovnice:

$$\begin{aligned} y_3 - y_1 &= (x_3 - x_1) \operatorname{tg} \sigma_{13} , \\ y_3 - y_2 &= (x_3 - x_2) \operatorname{tg} \sigma_{23} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Druhú rovnicu (4.4) odčítame od prvej a pre x_3 dostaneme

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (x_3 - x_1) \operatorname{tg} \sigma_{13} - (x_3 - x_2) \operatorname{tg} \sigma_{23} , \\ x_3 &= \frac{(y_2 - y_1) + x_1 \operatorname{tg} \sigma_{13} - x_2 \operatorname{tg} \sigma_{23}}{\operatorname{tg} \sigma_{13} - \operatorname{tg} \sigma_{23}} . \end{aligned} \quad (4.5)$$



Obr. 4.1. Výpočet pretínania napred smerníkmi

Od rovnice (4.5) na oboch stranách odpočítame x_2 a po úprave dostaneme

$$x_3 - x_2 = \Delta x_{23} = \frac{(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \sigma_{13}}{\operatorname{tg} \sigma_{13} - \operatorname{tg} \sigma_{23}} . \quad (4.6)$$

Od rovnice (4.5) na oboch stranách odpočítame x_1 a po úprave dostaneme

$$x_3 - x_1 = \Delta x_{13} = \frac{(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \sigma_{23}}{\operatorname{tg} \sigma_{13} - \operatorname{tg} \sigma_{23}} . \quad (4.7)$$

Počítané súradnice bodu P_3 sú:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + \Delta x_{13} \operatorname{tg} \sigma_{13} = y_2 + \Delta x_{23} \operatorname{tg} \sigma_{23} , \\ x_3 &= x_1 + \Delta x_{13} = x_2 + \Delta x_{23} . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dvojitým zhodným výsledkom je výpočet kontrolovaný počínajúc rovnicou (4.5). Smerníky a ich tangenty nie sú rovnicami (4.8) kontrolované. Aj pri chybných smerníkoch dostaneme zhodné výsledky. Preto musíme smerníky spoľahlivo vypočítať. V našom prípade podľa obr. 4.1 je:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \sigma_{15} + \omega_1, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{24} + \omega_2,\end{aligned}\quad (4.9)$$

kde smerníky σ_{15}, σ_{24} vypočítame zo súradníc príslušných bodov, ω_1, ω_2 sú odmerané uhly. Pri programovom výpočte je vhodné funkcie $\operatorname{tg} \sigma$ zadávať vzťahom $\sin \sigma / \cos \sigma$.

Príklad 4.1: Máme dané súradnice bodov 38, 64, 160 a smerníky $\sigma_{38,12}, \sigma_{64,12}, \sigma_{160,12}$. Pretínaním napred smerníkmi vypočítame súradnice bodu 12 (obr. 4.2). (Poznámka: Spoľahlivé riešenie vyžaduje použiť najmenej dve vhodné kombinácie pretínania napred. Príklad 4.1 predstavuje jednu z kombinácií).

Dané údaje Tabuľka 4.1

Číslo bodu	y	x	σ_{i12}
i	[m]		[g]
38	483 916,63	1 232 896,28	241,4910 ₉
64	482 501,12	1 233 329,15	181,0932 ₄
160	481 206,09	1 232 444,99	125,1658 ₄

Pri výpočte redukuje sa súradnice x o hodnotu 1 230 000,0 m a y o hodnotu 480 000,0 m.

$$x_{12} = \frac{(y_{38} - y_{64}) + x_{38} \operatorname{tg} \sigma_{38,12} - x_{64} \operatorname{tg} \sigma_{64,12}}{\operatorname{tg} \sigma_{38,12} - \operatorname{tg} \sigma_{64,12}} =$$

$$x_{12} = \frac{-1415,51 + 2896,28 \cdot 0,762954_4 - 3329,15 \cdot (-0,306037_6)}{0,762954_4 - (-0,306037_6)} = 1231696,05_1 \text{ m},$$

$$x_{12} - x_{38} = \Delta x_{38,12} = -1200,229 \text{ m},$$

$$x_{12} - x_{64} = \Delta x_{64,12} = -1633,099 \text{ m},$$

$$y_{12} = y_{38} + \Delta x_{38,12} \cdot \operatorname{tg} \sigma_{38,12} = 3916,63 + (-1200,229 \cdot 0,762954_4) = 483000,910 \text{ m},$$

$$y_{12} = y_{64} + \Delta x_{64,12} \cdot \operatorname{tg} \sigma_{64,12} = 2501,12 + (-1633,099) \cdot (-0,306037_6) = 483000,910 \text{ m}.$$

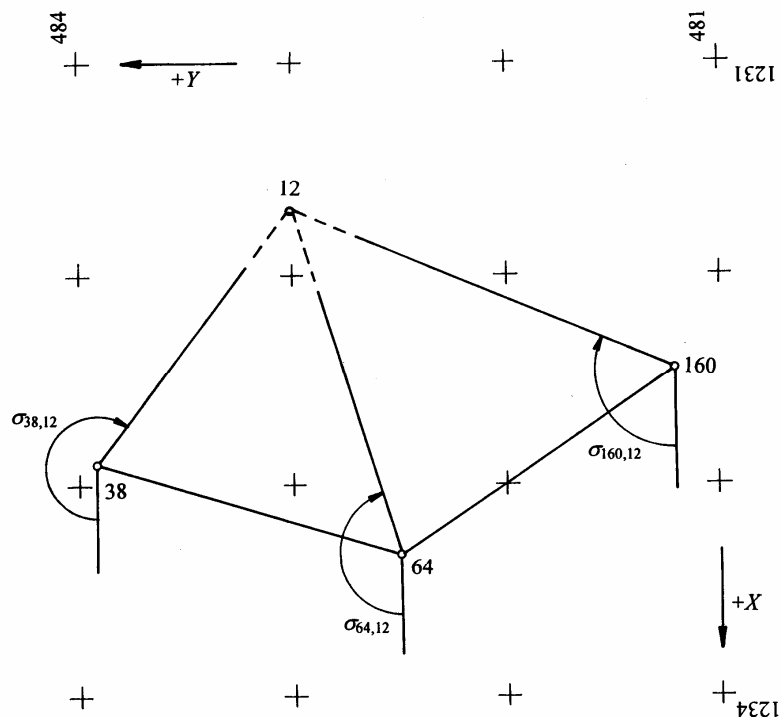
$$\Delta x_{64,12} = \frac{(y_{64} - y_{38}) - (x_{64} - x_{38}) \operatorname{tg} \sigma_{38,12}}{\operatorname{tg} \sigma_{38,12} - \operatorname{tg} \sigma_{64,12}} = \frac{-1415,51 - (432,87 \cdot 0,762954_4)}{1,068992} = -1633,09_9 \text{ m},$$

$$\Delta x_{38,12} = \frac{(y_{64} - y_{38}) - (x_{64} - x_{38}) \operatorname{tg} \sigma_{64,12}}{\operatorname{tg} \sigma_{38,12} - \operatorname{tg} \sigma_{64,12}} = \frac{-1415,51 - (432,87 \cdot -0,306037_6)}{1,068992} = -1200,22_9 \text{ m},$$

$$x_{12} = x_{38} + \Delta x_{38,12} = 1232896,28 - 1200,22_9 = 1231696,05_1 \text{ m},$$

$$x_{12} = x_{64} + \Delta x_{64,12} = 1233329,15 - 1633,09_9 = 1231696,05_1 \text{ m}.$$

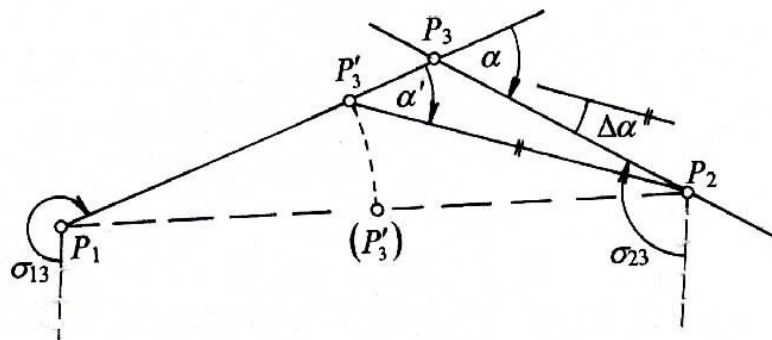
Súradnice bodu 12 z trojuholníka 38, 64, 12 sú $y_{12} = 483\,000,91_0 \text{ m}$, $x_{12} = 1231\,696,05_1 \text{ m}$.



Obr. 4.2. Pretínanie napred smerníkmi

4.4 Iteračný výpočet pretínania napred

Máme dané súradnice bodov P_1 a P_2 a smerníky σ_{13} , σ_{23} (obr. 4.3)



Obr. 4.3. Iteračný výpočet pretínania napred

Súradnice bodu P_3 vypočítame iteračným postupom programového výpočtu metódou zhusťovania intervalu výpočtu. Zvolíme smer iteračného výpočtu, napr. na strane s_{13} a budeme počítat' súradnice bodu P'_3 , pokiaľ

$$|\Delta\alpha| < \varepsilon, \quad (4.10)$$

kde ε je zvolená presnosť výpočtu (napr. $\varepsilon = (1.10^{-6})^g$),

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha,$$

$$\alpha' = \sigma_{3'2} - \sigma_{13}, \quad (4.11)$$

$$\alpha = \sigma_{32} - \sigma_{13}.$$

a) Zvolíme východiskové podmienky výpočtu:

- začiatočnú polohu bodu P'_3 na spojnici P_1P_3 . Môžeme položiť $P'_3 = P_1$, alebo P'_3 umiestnime do ľubovoľnej vzdialenosti od bodu P_1 (napr. $s_{13'} = \frac{s_{12}}{2}$),

- východiskový interval iterácie s (napr. $s = 10$ m).

b) Telo cyklu obsahuje:

- výpočet súradníc y'_3, x'_3 v smere σ_{13} vo vzdialenosti $s_{13'}$,

- výpočet uhla

$$\alpha' = \sigma_{3'2} - \sigma_{13} \quad \text{a} \quad (4.12)$$

- rozdielu uhlov

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha, \quad (4.13)$$

- určenie smeru iteračného približovania sa k bodu V podľa znamienka

$$a = \text{sign}(\Delta\alpha), \quad (4.14)$$

- test ukončenia výpočtu, resp. nové podmienky v nasledujúcom iteračnom cykle.

$$\text{Ak } |\Delta\alpha| < \varepsilon \text{ výpočet je ukončený, potom} \quad (4.15)$$

$$y_3 = y'_3 \text{ a } x_3 = x'_3.$$

Od druhej iterácie ak

$$|\Delta\alpha| \geq \varepsilon \quad (4.16)$$

a $\text{sign}(\Delta\alpha) = a$, potom položíme $s_{13'} = s_{13'} + s$, pokračujeme v novom cykle.

Ak $\text{sign}(\Delta\alpha) \neq a$, vrátime sa k predchádzajúcemu kroku $s_{13'} = s_{13'} - s$, zhustíme interval

$s = \frac{s}{10}$ a vypočítame novú vzdialenosť

$$s_{13'} = s_{13'} + s. \quad (4.17)$$

Ďalej pokračujeme v ďalšom cykle iteračného výpočtu.

Iteračný postup výpočtu pretínania napred (Bitterer 1990) aplikujeme pri uhloch $\alpha \approx 0$. Takéto výpočty pretínania napred sa vyskytujú pri analytickom projektovaní opravy koľaje.

4.5 Cassiniho riešenie pretínania nazad

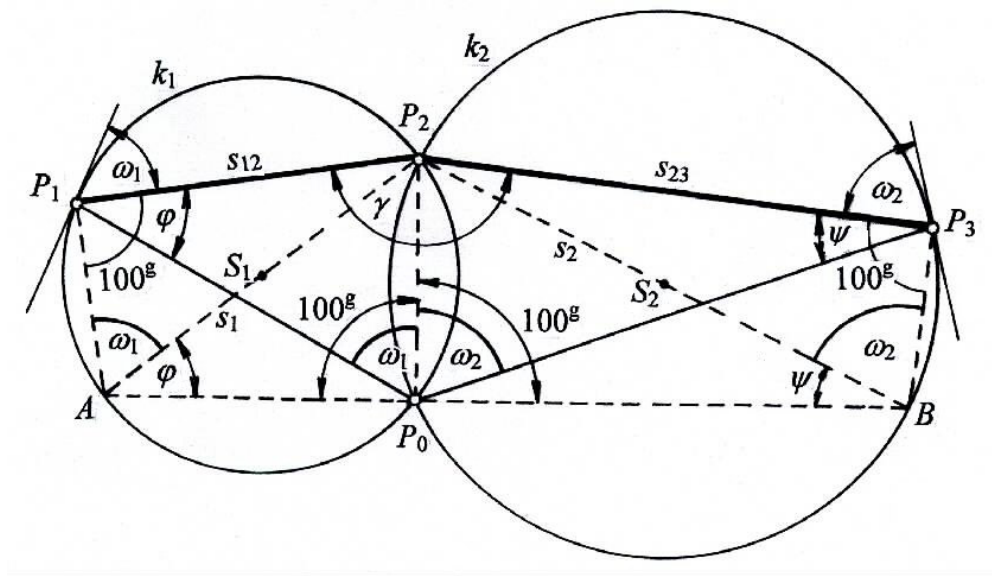
Toto riešenie sa zakladá na geometrickej konštrukcii určovaného bodu pochádzajúce od Cassiniho (r. 1671).

Kružnice k_1, k_2 zostrojíme pomocou obvodových uhlov ω_1, ω_2 nad tetivami s_{12}, s_{23} . Bod P_0 leží na priesečníku kružníc. Priemery kružníc k_1 a k_2 z bodu P_2 pretínajú kružnice v bodoch A, B . Ich spojnice prechádza bodom P_0 a je na smer P_0P_2 kolmá. Z obr. 4.3 je vidieť, že uhly P_2P_0A a P_2P_0B sú pravé a uhol AP_0B je priamy. Konštrukcia dovoľuje určiť bod P_0 ako priesečník kružníc alebo ako priesečník priamok. Analyticky je výhodné riešenie priesečníka priamok. Neznáme uhly φ a ψ máme aj pri bodoch A a B .

Dané sú súradnice bodov P_1, P_2, P_3 a uhly ω_1, ω_2 . V trojuholníku ABP_2 vyjadríme uhly φ a ψ

$$\sin \varphi = \frac{s_{20}}{s_1}, \quad \sin \psi = \frac{s_{20}}{s_2},$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_2}{s_1}. \quad (4.18)$$



Obr. 4.4. Cassiniho riešenie pretínania nazad

Od rovníc (4.18) odčítame na oboch stranách -1 a pripočítame $+1$. Rovnice podelíme a upravíme

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - 1}{\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} + 1} &= \frac{\frac{s_2}{s_1} - 1}{\frac{s_2}{s_1} + 1} = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \cot g \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

kde

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 200^g - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \gamma), \quad (4.20)$$

$$\gamma = \sigma_{21} - \sigma_{23}$$

a strany s_2, s_1 :

$$s_1 = \frac{s_{12}}{\sin \omega_1}, \quad s_2 = \frac{s_{23}}{\sin \omega_2}. \quad (4.21)$$

Z rovnice (4.19) vypočítame

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \arctg \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2} \right). \quad (4.22)$$

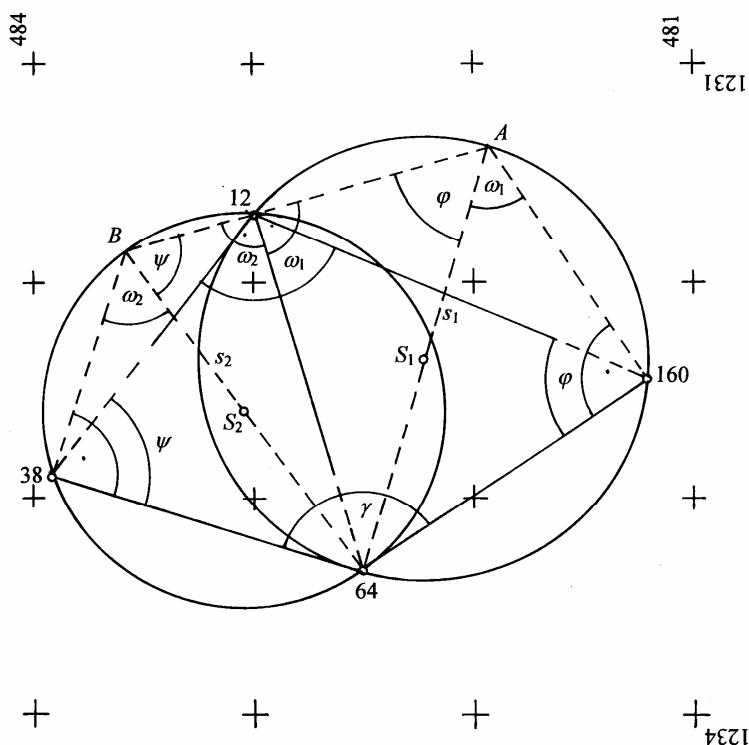
Spočítaním a odčítaním rovníc (4.20) a (4.22) dostaneme uhly φ a ψ . Kontrolou je

$$\omega_1 + \omega_2 + \varphi + \psi + \gamma = 400^g. \quad (4.23)$$

Týmto sme úlohu previedli na pretínanie napred. Aby sme sa vyhli nežiadúcim komplikáciám vo výpočtoch, je potrebné dodržať označenie uvedené na (obr. 4.3).

Kontrola celého výpočtu je výpočet smerníkov σ_{01} , σ_{02} , σ_{03} zo súradníc určovaného bodu. Z nich vypočítame uhly ω_1 , ω_2 , ktoré sa musia zhodovať s výnimkou odchýlok vysvetliteľných zaokrúhľovaním čísiel s uhlami ω_1 , ω_2 zavedenými do výpočtu.

Príklad 4.2: Máme dané súradnice bodov 160, 64, 38 a uhly ω_1 a ω_2 odmerané na stanovisku 12 (obr. 4.5).



Obr. 4.5. Výpočet pretínania nazad Cassiniho riešením

Dané údaje				Tabuľka 4.2		
Číslo bodu	y	x	ω		s	
i	[m]		[g]		[m]	
160	481 206,09	1 232 444,99	ω_1	55,9268 ₇	$s_{160,64}$	1568,06 ₉
64	482 501,12	1 233 329,15	ω_2	60,3978 ₂	$s_{64,38}$	1480,21 ₈
38	483916,63	1 232 896,28				

Výpočet uhlov φ a τ :

$$\gamma = \sigma_{64,160} - \sigma_{64,38} = 261,8637_2^g - 118,8932_1^g = 142,9705_1^g,$$

$$\frac{\varphi + \tau}{2} = 200 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \gamma) = 200 - \frac{1}{2}(259,2952^g) = 70,3524^g,$$

$$s_1 = \frac{s_{160,64}}{\sin \omega_1} = \frac{1568,069 \text{ m}}{\sin 55,9268_7^\circ} = 2037,03_4 \text{ m},$$

$$s_2 = \frac{s_{64,38}}{\sin \omega_2} = \frac{1480,21_8 \text{ m}}{\sin 60,3978_2^\circ} = 1821,41_6 \text{ m},$$

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \arctg \left(\tg \frac{\varphi + \tau}{2} \cdot \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2} \right) = \arctg \left(\tg 70,3524_7^\circ \cdot \frac{-215,618}{3858,452} \right) = -7,0497_4^\circ,$$

$$\varphi = 63,3026_6^\circ, \quad \gamma_1 = 80,7704_7^\circ,$$

$$\psi = 77,4021_4^\circ, \quad \gamma_2 = 62,2000_4^\circ, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 142,9705_1^\circ,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \varphi + \tau + \gamma = 400^\circ.$$

Výpočet dĺžok:

$$s_{160,12} = s_{160,64} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \omega_1} = 1568,06_9 \text{ m} \frac{\sin 80,7704_7^\circ}{\sin 55,9268_7^\circ} = 1944,81_1 \text{ m},$$

$$s_{64,12} = s_{160,64} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1} = s_{64,38} \frac{\sin \tau}{\sin \omega_2} = 1568,06_9 \text{ m} \frac{\sin 63,3026_6^\circ}{\sin 55,9268_7^\circ} = 1480,21 \text{ m} \frac{\sin 77,4021_4^\circ}{\sin 60,3978_2^\circ} = 1707,86_6 \text{ m},$$

$$s_{38,12} = s_{64,38} \frac{\sin \gamma_2}{\sin \omega_2} = 1480,21_8 \text{ m} \frac{\sin 62,2000_4^\circ}{\sin 60,3978_2^\circ} = 1509,66_8 \text{ m}.$$

Výpočet smerníkov:

$$\sigma_{160,12} = \sigma_{160,64} + \varphi = 61,8637_2^\circ + 63,3026_6^\circ = 125,1663_8^\circ,$$

$$\sigma_{64,12} = \sigma_{64,160} - \gamma_1 = \sigma_{64,38} + \gamma_2 = 261,8637_2^\circ - 80,7704_7^\circ = 118,8932_1^\circ + 62,2000_4^\circ = 181,0932_5^\circ,$$

$$\sigma_{38,12} = \sigma_{38,64} - \psi = 318,8932_1^\circ - 77,4021_4^\circ = 241,4910_7^\circ.$$

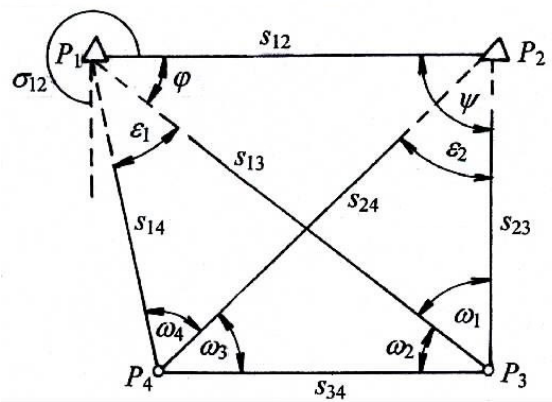
Výpočet súradníc:

$$\begin{aligned} y_{12} &= y_{160} + s_{160,12} \sin \sigma_{160,12} = 483000,910 \text{ m}, & x_{12} &= x_{160} + s_{160,12} \cos \sigma_{160,12} = 1231696,050 \text{ m}, \\ &= y_{64} + s_{64,12} \sin \sigma_{64,12} = 483000,910 \text{ m}, & &= x_{64} + s_{64,12} \cos \sigma_{64,12} = 1231696,050 \text{ m}, \\ &= y_{38} + s_{38,12} \sin \sigma_{38,12} = 483000,909 \text{ m}, & &= x_{38} + s_{38,12} \cos \sigma_{38,12} = 123696,050 \text{ m}. \end{aligned}$$

Výsledné súradnice bodu 12 sú $y_{12} = 483000,91 \text{ m}$, $x_{12} = 1231696,05 \text{ m}$.

4.6 Hansenova úloha a určenie neprístupnej vzdialenosti

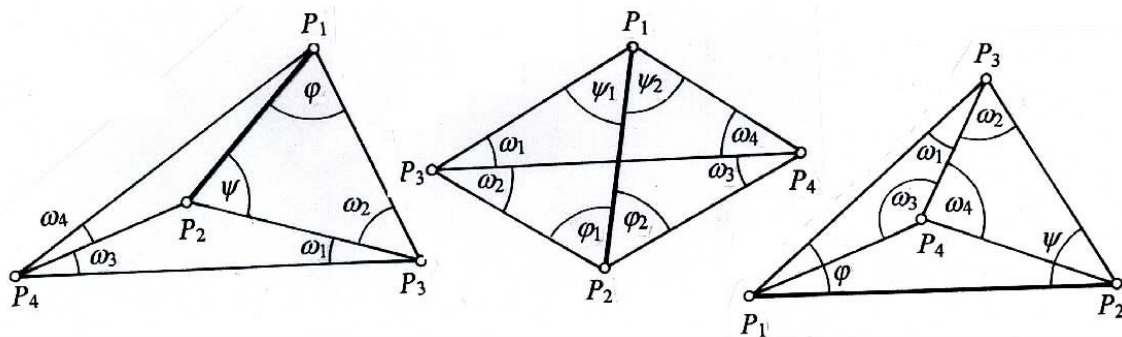
Pri Hansenovej úlohe sú dané súradnice neprístupných bodov P_1 a P_2 a uhly ω_1 až ω_4 (obr. 4.6). Máme určiť súradnice bodov P_3 a P_4 . Pri opačnej úlohe z odmeranej strany s_{34} a uhlov ω_1 až ω_4 máme určiť stranu s_{12} – neprístupnú vzdialenosť. V oboch prípadoch ide o riešenie štvoruholníka určeného jednou stranou a štyrmi uhlami, preto obe úlohy môžeme spojiť.



Obr. 4.6. Hansenova úloha

Vzájomná poloha daných a určovaných bodov môže byť rôzna ako je to vidieť z obr. 4.7.

Dôležité je označenie uhlov. Uhly φ a ψ musia ležať v jednom trojuholníku. Pomer $\sin \varphi : \sin \psi$ zostavíme z pomerov strán alebo pomocou všeobecnej vety sínusovej.



Obr. 4.7. Konfigurácie obrazcov riešenia Hansenovej úlohy

Ako pri pretínaní nazad, potrebujeme i tu vypočítať najprv uhly φ a ψ . Máme pre ne dve rovnice:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{1}{2}(200^g - \omega_1) \quad (4.23)$$

a zo sínusovej vety $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_{23}}{s_{13}}$

$$\frac{s_{13}}{s_{34}} = \frac{\sin(\omega_3 + \omega_4)}{\sin(200 - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4))}, \quad \frac{s_{34}}{s_{23}} = \frac{\sin(200 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3))}{\sin \omega_3},$$

keď ľavé a pravé strany posledných dvoch rovníc navzájom vynásobíme a po úprave dostaneme druhú rovnicu:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin(200 - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)) \sin \omega_3}{\sin(\omega_3 + \omega_4) \sin(200 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3))} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu}. \quad (4.24)$$

Z rovnice (4.24) ako pri pretínaní nazad, dostaneme:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cot g(50^g + \mu). \quad (4.25)$$

Z rovnice (4.25) máme $\frac{\varphi - \psi}{2}$ a z rovnice (4.23) $\frac{\varphi + \psi}{2}$. Spočítaním rovníc dostaneme φ a odčítaním ψ .

Výpočtom uhlov φ a ψ prevedieme úlohu na pretínanie napred. Ďalší postup je už známy. Ak v úlohe ide o výpočet neprístupnej vzdialenosti, vypočítame po vyčíslení rovníc (4.23) a (4.25) strany s_{13} a s_{23} a z nich dvojmo vzdialenosť s_{12} .

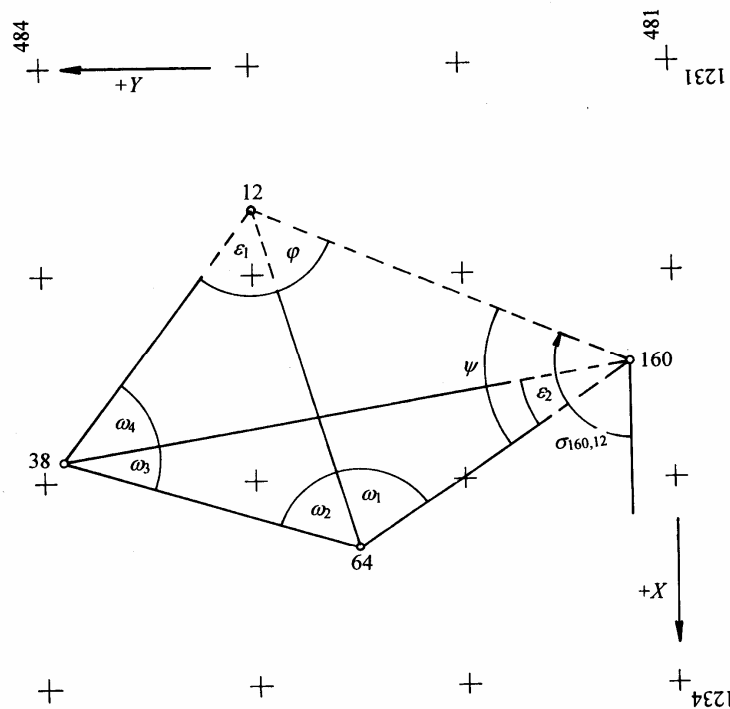
Spoľahlivosť určenia súradníc bodov P3 a P4 závisí od pomeru strán v konfigurácii obrazca Hansenovej úlohy. Ideálny pomer strán je 1:1. Spoľahlivé výsledky dostaneme do pomeru $1:3 = s_{12} : s_{34}$.

Príklad 4.3: Dané sú súradnice bodov 12, 160 a uhly $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ a ω_4 . Súradnice bodov 38 a 64 vypočítame riešením Hansenovej úlohy (obr. 4.8).

Dané údaje

Tabuľka 4.3

Číslo bodu	y	x	ω	
i	[m]		[g]	
12	483 000,91	1 231 696,05	ω_1	80,7698 ₆
160	481 206,09	1 232 444,99	ω_2	62,2012 ₆
	$s_{12,160}$	1 944,811 m	ω_3	29,3970 ₄
	$\sigma_{12,160}$	325,1663 $\frac{g}{7}$	ω_4	48,0064 ₀



Obr. 4.8. Výpočet Hansenovej úlohy

Vypočítame uhly ε_1 a ε_2

$$\varepsilon_1 = 200 - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = 60,3953_0^g,$$

$$\varepsilon_2 = 200 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 27,6318_4^g.$$

Podľa rovnice 4.24 $\cotg \mu$ bude:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \tau} = \frac{1}{\tg \mu} \frac{\sin \varepsilon_1 \sin \omega_3}{\sin(\omega_3 + \omega_4) \sin \varepsilon_2} = \frac{0,812651_1 \cdot 0,445531_3}{0,937665_2 \cdot 0,420539_5} = 0,918179_8,$$

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{1}{0,918179_8} = 52,7138_6^g.$$

Výpočet uhlov φ a ψ :

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{1}{2}(200 - \omega_1) = 59,6150_7^g,$$

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cot g(50^g + \mu) \right] = \operatorname{arctg}[1.359025_1, -0,042655_0] = -3,6863_2,$$

$$\varphi = 55,9287_5,$$

$$\psi = 63,3013_9.$$

Dĺžky zo vzťahných bodov 12,160 na určované body 38,64 sú:

$$s_{12,38} = s_{12,160} \frac{\sin(\psi - \varepsilon_2)}{\sin \omega_4} = 1944,811 \frac{0,531436_9}{0,684620_3} = 1509,66_1 \text{ m},$$

$$s_{12,64} = s_{12,160} \frac{\sin \psi}{\sin \omega_1} = 1944,811 \frac{0,838397_1}{0,954723_8} = 1707,849_0 \text{ m},$$

$$s_{160,38} = s_{12,160} \frac{\sin(\varepsilon_1 + \varphi)}{\sin \omega_4} = 1944,811 \frac{0,967304_7}{0,684620_3} = 2747,83_6 \text{ m},$$

$$s_{160,64} = s_{12,160} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1} = 1944,811 \frac{0,769799_3}{0,954723_8} = 1568,11_2 \text{ m}.$$

Výpočet súradníc bodov:

$$\begin{aligned} y_{38} &= y_{12} + s_{12,38} \sin(\sigma_{12,160} + \varphi + \varepsilon_1) = 483000,91 \text{ m} + 1509,66_1 \text{ m} \cdot 0,606562_7 = 483916,61_4 \text{ m}, \\ &= y_{160} + s_{160,38} \sin(\sigma_{160,12} - \psi + \varepsilon_2) = 481206,09 \text{ m} + 2747,83_6 \text{ m} \cdot 0,986421_0 = 483916,61_3 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{38} &= x_{12} + s_{12,38} \cos(\sigma_{12,160} + \varphi + \varepsilon_1) = 1231696,05 \text{ m} + 1509,66_1 \text{ m} \cdot 0,795035_6 = 1232896,28_4 \text{ m}, \\ &= x_{160} + s_{160,38} \cos(\sigma_{160,12} - \psi + \varepsilon_2) = 1232444,99 \text{ m} + 2747,83_6 \text{ m} \cdot 0,164236_1 = 1231896,28_4 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{64} &= y_{12} + s_{12,64} \sin(\sigma_{12,160} + \varphi) = 483000,91 \text{ m} + 1707,849 \text{ m} \cdot -0,292611_9 = 482501,17_3 \text{ m}, \\ &= y_{160} + s_{160,64} \sin(\sigma_{160,12} - \psi) = 481206,09 \text{ m} + 1568,11_2 \text{ m} \cdot 0,825886_6 = 482501,17_3 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{64} &= x_{12} + s_{12,64} \cos(\sigma_{12,160} + \varphi) = 1231696,05 \text{ m} + 1707,849 \text{ m} \cdot 0,956231_2 = 123329,14_9 \text{ m}, \\ &= x_{160} + s_{160,64} \cos(\sigma_{160,12} - \psi) = 1232444,99 \text{ m} + 1568,11_2 \text{ m} \cdot 0,563836_2 = 1233329,14_8 \text{ m}. \end{aligned}$$

Výsledné súradnice bodov 38 a 64

Tabuľka 4.4

Číslo bodu	y	x
	[m]	
38	483 916,61	1 232 896,28
64	482 501,17	1 233 329,15

Poznámka k výpočtu: Pri výpočtoch v cm postačí dĺžky počítat' na mm. Argumenty funkcií aplikujeme na 6 desatinných miest.