

11. KOMBINOVANÉ VYROVNAVANIE

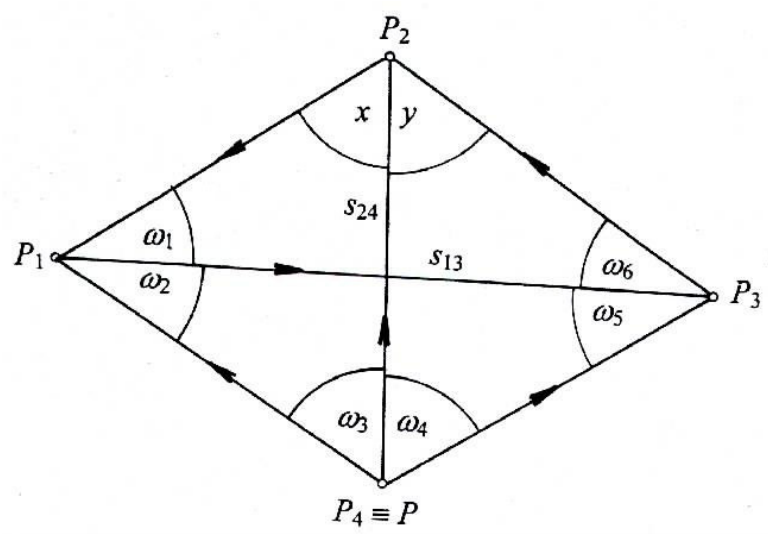
11.1 Vyrovnanie podmienkových meraní s neznámymi

Tento postup vyrovnania používame v prípade, keď sú pri vyrovnaní neznáme veličiny viazané podmienkami.

Majme n meraní, r podmienok a k neznámych, vtedy dostaneme $(n + r)$ rovníc opráv. Pri tom musí platiť

$$n > r > k \quad \text{a} \quad n > r + k. \quad (11.1)$$

Ako príklad riešenia si uveďme vyrovnanie štvoruholníka s odmeranou uhlopriečkou a neúplným meraním uhlov (10.1).



Obr. 11.1. Vyrovnanie štvoruholníka s neznámymi x, y

Máme odmerané uhly $\bar{\omega}_1$ až $\bar{\omega}_6$ a uhlopriečku v štvoruholníku $s_{13} = s$. Je potrebné určiť vyrovnané uhly ω_1 až ω_6 , vyrovnanú dĺžku s , neznáme uhly x, y a napokon vypočítať dĺžku s_{24} . Podľa zadania je $n = 7, r = 4$ a $k = 2$, čím sú splnené vzťahy (11.1).

Zostavíme 3 uhlové podmienkové rovnice

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 - 200^g = 0, \\ \varphi_b &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + x - 200^g = 0, \\ \varphi_c &= \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 + y - 200^g = 0, \end{aligned} \quad (11.2)$$

a stranovú podmienkovú rovnicu s využitím rovnosmerných a protismerných uhlov (obr. 11.1)

r	$x, (\bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6), \omega_2$
p	$y, (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \omega_5$

$$\varphi_d = \sin x \sin(\bar{\omega}_5 - \bar{\omega}_6) \sin \omega_2 - \sin y \sin(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \sin \bar{\omega}_5 = 0. \quad (11.3)$$

Všeobecne to môžeme napísať

$$\varphi_a(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x, y, z, \dots) = 0,$$

$$\varphi_b(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x, y, z, \dots) = 0, \quad (11.4)$$

⋮

$$\varphi_r(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x, y, z, \dots) = 0.$$

Zavedieme označenie v rovniciach (11.4) $\ell_i = \bar{\ell}_i + v_1$, $x = x_0 + dx$, $y = y_0 + dy$, $z = z_0 + dz$, ... a rovnice (11.4) linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu

$$a_i = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \ell_i}, b_i = \frac{\partial \varphi_b}{\partial \ell_i}, \dots, r_i = \frac{\partial \varphi_r}{\partial \ell_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$A_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x}, \quad B_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial y}, \quad C_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial z}, \dots$$

⋮

(11.5)

$$A_r = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x}, \quad B_r = \frac{\partial \varphi_r}{\partial y}, \quad C_r = \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}, \dots$$

V príklade sme vypočítali x_0 a y_0 zo vzťahov: $x_0 = 200^{\text{g}} - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ a $y_0 = 200^{\text{g}} - (\omega_4 + \omega_5 + \omega_6)$. Uzávery v podmienkových rovniciach vypočítame z rovníc

$$u_a = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x_0, y_0, z_0, \dots),$$

$$u_b = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x_0, y_0, z_0, \dots), \quad (11.6)$$

⋮

$$u_r = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, x_0, y_0, z_0, \dots).$$

Pretvorené podmienkové rovnice budú mať tvar

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + A_a dx + B_a dy + C_a dz + \dots + u_a = 0,$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + A_b dx + B_b dy + C_b dz + \dots + u_b = 0, \quad (11.7)$$

⋮

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + A_r dx + B_r dy + C_r dz + \dots + u_r = 0.$$

Na vyjadrenie podmienkových rovníc v maticovom tvare zavedieme označenie

$$\mathbf{A}_{(r,n)}^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_{(n,1)} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_{(r,k)} = \begin{vmatrix} A_a & B_a & C_a & \dots \\ A_b & B_b & C_b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A_r & B_r & C_r & \dots \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{(k,1)} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(r,1)} = \begin{vmatrix} u_a \\ u_b \\ \vdots \\ u_r \end{vmatrix}.$$

Podmienkové rovnice v maticovom tvare sú

$$\mathbf{A}_{(r,n)}^T \mathbf{v}_{(n,1)} + \mathbf{F}_{(r,k)} \mathbf{x}_{(k,1)} + \mathbf{u}_{(r,1)} = 0. \quad (11.9)$$

Neznáme opravy v_i a x, y, z, \dots podľa zásad vyrovnania MNŠ určíme z funkcie

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \min, \quad (11.10)$$

ktorú rozšírime o vedľajšiu podmienku doplnenú Langrangeovými faktormi – korelátmi.

Funkcia (11.9) s váhovou maticou $\mathbf{P}_{(n,n)} = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & p_n \end{vmatrix}$ a vektorom korelát

$$\mathbf{k}_{(r,1)} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{vmatrix} \text{ má tvar}$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u}) = \min. \quad (11.11)$$

Na určenie minima funkcie (11.11) položíme parciálne derivácie podľa \mathbf{v} a \mathbf{x} rovné nule

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{k} = 0, \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{k}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{k} = 0. \quad (11.13)$$

Z rovnice (11.12) vypočítame vektor opráv

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{k} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k}. \quad (11.14)$$

Rovnice opráv majú tvar

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \dots + \frac{r_1}{p_1} k_r, \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \dots + \frac{r_2}{p_2} k_r, \\ &\vdots \\ v_n &= \frac{a_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n}{p_n} k_2 + \dots + \frac{r_n}{p_n} k_r. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Za účelom výpočtu korelát, rovnicu opráv (11.14) dosadíme do rovnice (11.9) a pripojíme rovnicu (11.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{k} + \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{F}^T \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (11.16)$$

Rovnice v maticovom tvare sú

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.17)$$

Rovnice (11.16) v Gaussovej sumačnej symbolike majú tvar

$$\begin{aligned}
& \sum \frac{aa}{p} k_1 + \sum \frac{ab}{p} k_2 + \dots + \sum \frac{ar}{p} k_r + A_a dx + B_a dy + C_a dz + \dots u_a = 0, \\
& \sum \frac{ab}{p} k_1 + \sum \frac{bb}{p} k_2 + \dots + \sum \frac{br}{p} k_r + A_b dx + B_b dy + C_b dz + \dots u_b = 0, \\
& \vdots \\
& \sum \frac{ar}{p} k_1 + \sum \frac{br}{p} k_2 + \dots + \sum \frac{rr}{p} k_r + A_r dx + B_r dy + C_r dz + \dots u_r = 0, \\
& A_a k_1 + A_b k_2 + \dots + A_r k_r = 0, \\
& B_a k_1 + B_b k_2 + \dots + B_r k_r = 0, \\
& C_a k_1 + C_b k_2 + \dots + C_r k_r = 0. \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Keď použijeme rovnice (11.16), vektor korelát \mathbf{k} a vektor \mathbf{v} opráv \mathbf{x} neznámych veličín (uhlov) vypočítame tak, že z prvej rovnice eliminujeme koreláty, ktoré dosadíme do druhej rovnice (11.16)

$$\mathbf{k} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u}) = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u}) \tag{11.19}$$

$$\mathbf{F}^T \mathbf{k} = -\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u}) = -\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x} - \mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}. \tag{11.20}$$

Pri vyrovnaní podmienkových meraní s neznámymi postupujeme tak, že po zostavení rovníc opráv (11.14) zostavíme normálne rovnice v sumačnom tvare (11.18) alebo v maticovom tvare (11.16). Vypočítame koreláty z rovnice (11.19), ktoré dosadíme do rovnice (11.14) a vypočítame opravy. Z rovnice (11.20) vypočítame vektor neznámych \mathbf{x} . Vyrovnané merané veličiny (v príklade uhly) budú $\ell_i = \bar{\ell}_i + v_i$ a neznáme veličiny $x = x_0 + dx$, $y = y_0 + dy$, $z = z_0 + dz, \dots$

Jednotkovú strednú chybu vypočítame zo vzťahu

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{r - k}}, \tag{11.21}$$

kde r je počet podmienkových meraní a k je počet neznámych.

Súčet štvorcov opráv vypočítame použitím rovnice (11.22)

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} &= \mathbf{k}^T \mathbf{A}^T \underbrace{\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{k}, \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{E} \\
\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} &= \mathbf{k}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Podľa prvej rovnice (11.16)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{k} = -\mathbf{F} \mathbf{x} - \mathbf{u}, \text{ potom}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = -\mathbf{k}^T (\mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{u}) = -\mathbf{k}^T \mathbf{F} \mathbf{x} - \mathbf{k}^T \mathbf{u}.$$

Podľa druhej rovnice (11.16) je $\mathbf{F}^T \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \mathbf{F} = 0$.

Súčet štvorcov vypočítame z rovnice

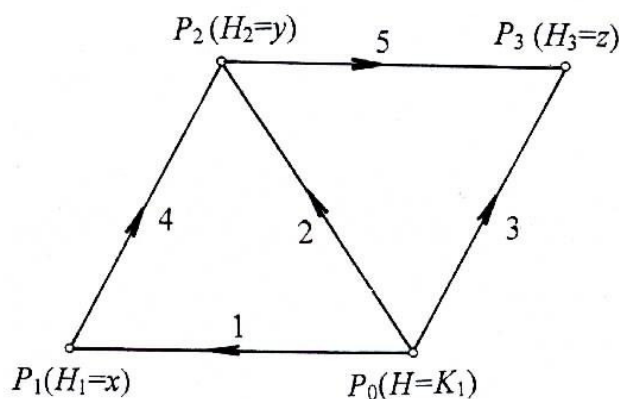
$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = -\mathbf{k}^T \mathbf{u} = -\mathbf{u}^T \mathbf{k} . \quad (11.23)$$

Rovnicu (11.22) zvyčajne používame na kontrolu vypočítaných opráv.

11.2 Vyrovnanie sprostredkujúcich meraní s podmienkami medzi meranými veličinami

Tento postup vyrovnania používame vtedy, keď niekoľko veličín, ktoré z merania odvodzujeme sú známe.

Napr. technickou niveláciou meriame prevýšenia medzi bodmi P_0 až P_3 . Jedno z prevýšení je určené presnou niveláciou (h_{13}). Toto prevýšenie nám vytvára podmienku na vyrovnanie.



Obr. 11.2. Vyrovnanie výškovej siete

Sú odmerané prevýšenia $L_i = (i = 1, 2, \dots, 5)$. Smer stúpania označuje šípka. Poznáme výšky bodov P_1 a P_3 . Vo vzťahu k jednému bodu (P_0) určujeme výšky troch bodov. Počet meraní (prevýšení) $n = 5$, počet neznámych (výšky bodov) $m = 3$, počet podmienok (jedno dané prevýšenie) $r = 1$.

Počet rovníc opráv je totožný s počtom meraní. Vyrovnané merania $L_i + v_i$ merania sú v sprostredkujúcom funkčnom vzťahu s neznámymi x, y, z, \dots

$$L_i + v_i = f_i(x, y, z, \dots) \quad (11.24)$$

$$v_i = f_i(x, y, z, \dots) - L_i . \quad (11.25)$$

Zvolíme predbežné hodnoty neznámych $x_0, y_0, z_0, \dots, (m = 3)$ podľa vzťahu

$$x = x_0 + dx ,$$

$$y = y_0 + dy , \quad (11.26)$$

$$z = z_0 + dz ,$$

ktoré dosadíme do rovnice (11.25)

$$v_i = f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz, \dots) - L_i . \quad (11.27)$$

Rovnice (11.27) linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu

$$v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz + \dots - \ell_i , \quad (11.28)$$

$$\text{kde } a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad b_i = \frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad c_i = \frac{\partial f_i}{\partial z}, \quad \dots \quad - \ell_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dots) - L_i .$$

K rovniciam opráv pridáme podmienkové rovnice v tvare

$$\begin{aligned} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz + \dots + u_A &= 0 \\ B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz + \dots + u_B &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \quad (11.29)$$

Rovnice opráv v príklade zostavíme podľa schémy, napr. na určenie výšky x bodu P_1

$$x = H + L_1 + v_1, \quad (11.30)$$

kde H je výška bodu P_0 .

Rovnice opráv a linearizované rovnice opráv budú

$$\begin{aligned} v_1 &= x - H - L_1, & v_1 &= dx - \ell_1 \\ v_2 &= y - H - L_2, & v_2 &= dy - \ell_2 \\ v_3 &= z - H - L_3, & v_3 &= dz - \ell_3 \\ v_4 &= -x + y - L_4, & v_4 &= -dx + dy - \ell_4 \\ v_5 &= -y + z - L_5, & v_5 &= -dy + dz - \ell_5 \end{aligned} \quad (11.31)$$

a podmienková rovnica

$$-x + z = h_{13} \quad 0 = -dx + dz + u$$

Vzťahy v rovniciach (11.28) a (11.29) vyjadríme rovnicami v maticovom zápise

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(n,k)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(k,1)} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\ell}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{(r,k)}^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(r,1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,k)} \mathbf{x}_{(k,1)} - \boldsymbol{\ell}_{(n,1)}, \quad (11.32)$$

$$\mathbf{F}_{(r,k)}^T \mathbf{x}_{(k,1)} + \mathbf{u}_{(r,1)} = 0. \quad (11.33)$$

Podľa zásad vyrovnávacieho počtu pre korelované merania vektor \mathbf{x} určíme za podmienky

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \min. \quad (11.34)$$

pri splnení vedľajšej podmienky definovanej rovnicami (11.32). Hlavnú podmienku (11.34) rozšírime o Langrangeové faktory – koreláty $2\mathbf{k}^T$, ktorými prenásobíme vedľajšiu podmienku (11.32) a dostaneme

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}) = \min., \quad (11.35)$$

kde $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$ sú matice váhových koeficientov a

$\mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_A \\ k_B \\ \vdots \end{vmatrix}$ je vektor korelát.

Rovnicu (10.34) upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \ell^T) \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x} - \ell) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell - \ell^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} + \ell^T \mathbf{Q}^{-1} \ell = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell + \ell^T \mathbf{Q}^{-1} \ell. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Funkcia Ω po úprave bude

$$\Omega = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell + \ell^T \mathbf{Q}^{-1} \ell + 2 \mathbf{k}^T \mathbf{F}^T \mathbf{x} + 2 \mathbf{k}^T \mathbf{u} = \min. \quad (11.37)$$

Minimum funkcie Ω určíme, keď rovnicu (11.36) zderivujeme podľa \mathbf{x} a položíme rovnú nule

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2 \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell + 2 \mathbf{k}^T \mathbf{F}^T = \mathbf{0}. \quad (11.38)$$

K upravenej rovnici (11.38), pridáme rovnicu (11.33) a dostaneme normálne rovnice.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{F} \mathbf{k} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^T \mathbf{x} + \mathbf{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Rovnice (11.39) v Gaussovej sumačnej symbolike majú tvar

$$\begin{aligned} \sum \frac{ab}{p} dx + \sum \frac{ab}{p} dy + \sum \frac{ac}{p} dz + A_1 k_A + B_1 k_B - \sum \frac{a}{p} \ell &= 0, \\ \sum \frac{ab}{p} dx + \sum \frac{bb}{p} dy + \sum \frac{bc}{p} dz + A_2 k_A + B_2 k_B - \sum \frac{b}{p} \ell &= 0, \\ \vdots \\ A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz + u_A &= 0, \\ B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz + u_B &= 0, \\ \vdots \end{aligned}$$

Rovnice (11.39) môžeme zapísať tiež v tvare

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell \\ -\mathbf{u} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.40)$$

Riešením rovníc (11.39) neznáme \mathbf{x} a vypočítame koreláty \mathbf{k} , pomocou ktorých vypočítame opravy (11.32)

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{u}. \quad (11.41)$$

$$- \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{k} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell = 0$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{F}^T \right)^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell . \quad (11.42)$$

Za účelom kontroly vynásobíme rovnicu (11.32) zľava $\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \ell . \quad (11.43)$$

Porovnáme rovnicu (11.43) a prvú rovnicu (11.39) a dostaneme kontrolnú rovnicu

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = -\mathbf{F} \mathbf{k} \quad (11.44)$$

a tiež výpočet opráv

$$\mathbf{v} = -\left(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{F} \mathbf{k} . \quad (11.45)$$

Neznáme vyrovnaním obsahuje vektor $\mathbf{x}^T = |dx \ dy \ dz \dots|$

$$x = x_0 + dx , \quad y = y_0 + dy , \quad z = z_0 + dz, \dots \quad (11.46)$$

Jednotkovú strednú chybu vypočítame zo vzťahu

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{n'}} , \quad (11.47)$$

kde $n' = n - k + r$. V našom príklade $n' = (5-3+1) = 3$.