

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (8.29)$$

pomocou ktorej určíme výberovú varianciu pre  $i$ -tú skupinu

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (8.30)$$

Použitím určených stredných hodnôt  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  vypočítame súčet štvorcov interných variancií

$$\left( \sum v_i^2 \right)_I = S_I^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^m \{(n_i - 1) \hat{\sigma}_i^2\}. \quad (8.31)$$

Keďže celkový počet meraní je

$$n = \sum_{i=1}^m n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_m \quad (8.32)$$

a my potrebujeme odhadnúť  $m$  parametrov  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ , podiel  $\frac{S_I^2}{\sigma^2}$  má  $\chi^2$  rozdelenie s  $n - m$  stupňami voľnosti

$$\frac{S_I^2}{\sigma^2} \approx \chi^2(n - m), \quad (8.33)$$

z ktorého odhadneme hodnotu variancií  $\sigma^2$

$$\hat{\sigma}_I^2 = \frac{S_I^2}{n - m} = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^m \{(n_i - 1) \hat{\sigma}_i^2\} \quad (8.34)$$

$\hat{\sigma}_I^2$  sa nazýva v analýze variancií **interná variancia**.

V zmysle vzťahu (8.27) vyslovíme hypotézu, že všetky výberové stredné hodnoty  $\bar{x}_i$  sú rovné hodnote  $\bar{x}$ . S ohľadom na uvedený predpoklad môžeme definovať totálny súčet štvorcov variancií

$$S_T^2(\mu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \mu)^2. \quad (8.35)$$

Minimalizáciou funkcie  $S_T^2$  deriváciou určíme celkový odhad teoretickej strednej hodnoty  $\mu$  veličinou  $\bar{x}$  (výberovou strednou hodnotou):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (n_i \bar{x}_i), \quad (8.36)$$

kde  $\bar{x}_i$  je určené vzťahom (8.22),  $n$  je celkový počet meraní (8.32) a  $\sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij} = n_i \bar{x}_i$

Varianciu každej vzorky strednej hodnoty  $\bar{x}_i$  s ohľadom na celkovú strednú hodnotu  $\bar{x}$

vyjadríme, keď podľa rovnice (8.30) platí  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{m - 1}$

$$S_E^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = (m-1)\sigma^2, \quad (8.37)$$

čo vedie k rozdeleniu  $\chi^2$  s  $m-1$  stupňami voľnosti

$$\frac{S_E^2}{\sigma^2} \approx \chi^2(m-1). \quad (8.38)$$

Toto nám poskytuje iný odhad náhodnej hodnoty variancie, nazvanej **externá variancia** pomocou vzťahu

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \{n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2\} = \frac{S_E^2}{m-1}. \quad (8.39)$$

Do rovnice (8.35) namiesto teoretickej strednej hodnoty  $\mu$  dosadíme hodnotu  $\bar{x}$  a vo vzťahu v zátvorke pridáme  $-\bar{x}_i$  a  $+\bar{x}_i$

$$\begin{aligned} S_T^2 &= S_T^2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} [(l_{ij} - \bar{x}_i) + (\bar{x}_i - \bar{x})]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^m \left[ (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \bar{x}_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \end{aligned} \quad (8.40)$$

keď výraz v hranatej zátvorke konverguje k nule.

Porovnaním vzťahov (8.31) a (8.37) totálna suma štvorcov variancií bude daná súčtom štvorcov interných a externých variancií

$$S_T^2 = S_I^2 + S_E^2. \quad (8.41)$$

Podiel vzťahov (8.41) s varianciou vedie k rozdeleniu  $\chi^2$

$$\frac{S_T^2}{\sigma^2} = \frac{S_I^2}{\sigma^2} + \frac{S_E^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1). \quad (8.42)$$

Z totálnej sumy štvorcov variancií  $S_T^2$  dostaneme celkovú varianciu  $\hat{\sigma}_T^2$  predelením rovnice (8.41) s  $(n-1)$  a použitím vzťahov (8.34) a (8.39), keď v menovateli rovnice sme pridali  $+m$  a  $-m$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{S_T^2}{n-1} = \frac{S_I^2 + S_E^2}{n-1} = \frac{\hat{\sigma}_I^2(n-m) + \hat{\sigma}_E^2(m-1)}{(n-m) + (m-1)}, \quad (8.43)$$

kde  $(n-m)$ ,  $(m-1)$ ,  $(n-1)$  sú stupne voľnosti pre  $S_I^2$ ,  $S_E^2$  a  $S_T^2$ . Tri typy variancií sú uvedené v tab. 8.1.

Z pomeru externej a internej variancie, získame nasledovné  $F$  - rozdelenie:

$$F_0 = \frac{\frac{S_E^2}{m-1}}{\frac{S_I^2}{n-m}} = \frac{\hat{\sigma}_E^2}{\hat{\sigma}_I^2} \sim F(m-1, n-m). \quad (8.44)$$

| Typ variancie | Stupeň voľnosti | Súčet štvorcov  | Variancie                              |
|---------------|-----------------|---|--|
| Interná       | $n-m$           | $S_I^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x}_i)^2$ | $\hat{\sigma}_I^2 = \frac{S_I^2}{n-m}$ |
| Externá       | $m-1$           | $S_E^2 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$                | $\hat{\sigma}_E^2 = \frac{S_E^2}{m-1}$ |
| Totálna       | $n-1$           | $S_T^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x})^2$   | $\hat{\sigma}_T^2 = \frac{S_T^2}{n-1}$ |

Nech  $F_{\alpha}(m-1, n-m)$  znamená kritickú hodnotu  $F$  – rozdelenia s  $(m-1, n-m)$  stupňami voľnosti pri hladine významnosti  $\alpha$ . Ak

$$F_0 > F_{\alpha}(m-1, n-m),$$

zamietame nulovú hypotézu  $H_0$ , čo znamená významný rozdiel medzi rôznymi skupinami meraní. Pri opačnom relačnom vzťahu nie je zamietnutá nulová hypotéza.

Pri numerických výpočtoch je vhodnejšie používať nasledovné vzťahy pre  $S_I^2$ ,  $S_E^2$  a  $S_T^2$ :

$$S_E^2 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m (n_i \bar{x}_i^2) - n \bar{x}^2, \quad (8.45)$$

$$S_T^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij}^2) - n \bar{x}^2, \quad (8.46)$$

$$S_I^2 = S_T^2 - S_E^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij}^2) - \sum_{i=1}^m (n_i \bar{x}_i^2). \quad (8.47)$$

**Príklad 8.6.** Preskúmame, či zmena počasia má vplyv na meranie uhlov. Meranie bolo vykonané v štyroch časových obdobiach s rovnakým teodolitom (t.j.  $m = 4$ ). Predpokladáme, že výsledky meraní uvedené v tabuľke majú rovnakú presnosť. Uvedeným príkladom ilustrujeme postup analýzy variácií.

| $i$ | Čas merania        | $n_i$ | Odmerané hodnoty $a_{ij}$ ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ) |          |          |          |
|-----|--------------------|-------|--|----------|----------|----------|
| 1   | $t_1 = 7.00$ hod.  | 3     | 56.04 46   | 56.04 48 | 56.04 49 |          |
| 2   | $t_2 = 11.00$ hod. | 2     | 56.04 45   | 56.04 44 |          |          |
| 3   | $t_3 = 14.00$ hod. | 3     | 56.04 46   | 56.04 47 | 56.04 48 |          |
| 4   | $t_4 = 19.00$ hod. | 4     | 56.04 43   | 56.04 45 | 56.04 44 | 56.04 46 |

V záujme zjednodušenia výpočtu redukuje sa uhlové hodnoty o konštantu 56.04 46

$$\ell_{ij} = \alpha_{ij} - 56.04 46.$$

Redukované hodnoty  $\ell_{ij}$  sú v nasledujúcej tabuľke.

| $i$ | Čas merania         | $n_i$  | $\ell_{ij}, (j = 1, 2, \dots, n_i)$ | $\sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij}$ | $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij}$ | $n_i \bar{x}_i^2$ | $\ell_{ij}^2$ | $\sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij}^2$ |
|-----|---------------------|--------|-------------------------------------|------------------------------|--|-------------------|---------------|--------------------------------|
| 1   | $t_1$               | 3      | 0, 2, 3                             | 5                            | $+\frac{5}{3}$   | $\frac{25}{3}$    | 0, 4, 9       | 13                             |
| 2   | $t_2$               | 2      | -1, -2,                             | -3                           | $-\frac{3}{2}$   | $\frac{9}{2}$     | 1, 4          | 5                              |
| 3   | $t_3$               | 3      | 0, 1, 3                             | 3                            | +1   | 3                 | 0, 1, 4       | 5                              |
| 4   | $t_4$               | 4      | -3, -1, -2, 0                       | -6                           | $-\frac{3}{2}$   | 9                 | 9, 1, 4, 0    | 14                             |
|     | Suma $\sum_{i=1}^m$ | $n=12$ |                                     | -1                           |  | $\frac{149}{6}$   |               | 37                             |

Z vypočítaných hodnôt v tabuľke vypočítame celkovú strednú hodnotu  $\bar{x}$ , externú varianciu  $S_E^2$  a externú varianciu  $\hat{\sigma}_E^2$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} \ell_{ij} = -\frac{1}{12},$$

$$S_E^2 = \sum_{i=1}^m (n_i \bar{x}_i^2) - n \bar{x}^2 = \frac{149}{6} - 12 \left( -\frac{1}{12} \right)^2 = 24.83 - 0.08 = 24.75,$$

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{S_E^2}{m-1} = \frac{24.75}{4-1} = 8.25.$$

Na výpočet  $S_T^2$  použijeme rovnicu (8.46)

$$S_I^2 = S_T^2 - S_E^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\ell_{ij}^2) - \sum_{i=1}^m (n_i \bar{x}_i^2) = 37 - \frac{149}{6} = 37 - 24.83 = 12.17.$$

Interná variancia je vyjadrená vzťahom (8.34)

$$\sigma_I^2 = \frac{S_I^2}{n-m} = \frac{12.17}{12-4} = 1.52.$$

Významnosť rozdielov variancií posúdime  $F$  testom podľa rovnice

$$F_0 = \frac{\hat{\sigma}_E^2}{\sigma_I^2} = \frac{8.25}{1.52} = 5.42 > 4.07 = F_{\alpha}(m-1, n-m) = F_{\alpha=5\%}(3,8).$$

Hodnotu  $F_{\alpha} = 4.7$  sme určili v tabuľke VIIb  $F$  rozdelenia. Na základe  $F$  – testu vyslovujeme záver pri riziku chybného rozhodnutia 5 %, že sú významné rozdiely v meraných uhloch, ktoré boli merané v rôznych časových obdobiach.