

5. VYROVNANIE PRIAMYCH MERANÍ

Vyrovnanie priamych meraní je najjednoduchší prípad aplikácie MNŠ. Máme daných n meraní (L_1, L_2, \dots, L_n) jedinej neznámej veličiny X so známymi váhami p_1, p_2, \dots, p_n . K určeniu neznámej veličiny by postačovalo jedno meranie. Máme $(n - 1)$ nadbytočných meraní, ktoré môžeme vyrovnat'. Neznámou veličinu X stotožníme s vyrovnanou hodnotou merania $L_i + v_i = \bar{x}$. Na zjednodušenie výpočtov sa zavádza hodnota neznámej x_0 a z vyrovnaní sa počíta len prírastok tejto neznámej dx , platí teda $\bar{x} = x_0 + dx$. Do vlastného výpočtu vstupujú redukované merania, vypočítané zo vzťahu $\ell_i = L_i - x_0$.

Rovnica opráv bude mať tvar

$$v_i = \bar{x} - L_i = x_0 + dx - L_i = dx - \ell_i,$$

ktorá po zavedení

$$\text{vektora merania } \ell_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}, \text{ matice váh } \mathbf{P}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix},$$

$$\text{vektora opráv } \mathbf{v}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ a vektora koeficientov } \mathbf{a}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, dx_{(1,1)},$$

dostane v maticovom vyjadrení formu

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{a}_{(n,1)} dx_{(1,1)} - \ell_{(n,1)}. \quad (5.1)$$

Vektor koeficientov $\mathbf{a}_{(n,1)}$ je stĺpcový vektor, ktorý má n riadkov so samými jednotkami. Je to formálna úprava, ktorá umožňuje prípadné zovšeobecnenie, keby vzťah medzi meraním a neznámou bol určený naviac násobnou konštantou.

Podmienka metódy najmenších štvorcov bude zapísaná funkciou

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad (5.2)$$

Do podmienky minima dosadíme z rov. (5.1) vzťah pre opravy \mathbf{v} a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= (dx_{(1,1)} \mathbf{a}_{(1,n)}^T - \ell_{(1,n)}^T) \mathbf{P}_{(n,n)} (\mathbf{a}_{(n,1)} dx_{(1,1)} - \ell_{(n,1)}) = \\ &= \mathbf{a}_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{(n,n)} \mathbf{a}_{(n,1)} dx_{(1,1)}^2 - \mathbf{a}_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{(n,n)} \ell_{(n,1)} dx_{(1,1)} - \ell_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{(n,n)} \mathbf{a}_{(n,1)} dx_{(1,1)} + \ell_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{(n,n)} \ell_{(n,1)}. \end{aligned}$$

Ak uvažíme, že matica váh $\mathbf{P}_{(n,n)}$ je diagonálna a $\mathbf{a}^T \mathbf{P} \ell$ je skalár, platí pre obidva prípady vlastnosť napr. $a = a^T$ a bude

$$\ell^T \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \ell = \mathbf{a}^T \mathbf{P} \ell.$$

Aby sme našli extrém položíme (5.2)

$$\frac{\partial(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial dx} = 2\mathbf{a}^T \mathbf{P} a dx - 2\mathbf{a}^T \mathbf{P} \ell = 0, \quad (5.3)$$

a odtiaľ

$$dx = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l}}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}} = \mathbf{A} \mathbf{l}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{P}}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}}, \quad x = x_0 + dx. \quad (5.4)$$

Pre ilustráciu uvedieme rozpis čitateľa i menovateľa

$$\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = (1 \ 1 \dots 1) \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{vmatrix} = (p_1 p_2 \dots p_n) \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{vmatrix} = \sum p \ell,$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a} = (1 \ 1 \dots 1) \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} = (p_1 p_2 \dots p_n) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} = \sum p.$$

Vidíme, že maticové vyjadrenie zodpovedá známemu vzťahu pre vážený aritmetický priemer

$$dx = \frac{\sum p \ell}{\sum p}.$$

Kontrola: Ak vynásobíme rovnicu opráv (5.1) zľava výrazom $\mathbf{A}^T \mathbf{P}$, dostaneme

$$\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a} dx - \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l},$$

čo je podľa (5.3) rovné nule a platí

$$\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0,$$

(v klasickom vyjadrení $\sum p v = 0$).

Jednotková stredná chyba bude

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-1}} \quad \left(\text{klasicky } m_0 = \sqrt{\frac{\sum p v v}{n-1}} \right),$$

s kontrolou $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = (\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a} dx - \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l}) dx - \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{a} dx + \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l},$

kde výraz v zátvorke z platnosti rovnice (5.3) je rovný nule, takže bude

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{a} dx \quad (\text{klasicky } \sum v v = \sum p \ell \ell - (\sum p \ell) dx).$$

Stredná chyba aritmetického priemeru

$$m_\omega = m_0 \sqrt{\frac{1}{p_x}} = m_0 \sqrt{Q_{xx}}$$

sa dostane aplikácia zákona hromadenia váh (4.11) na vzorec pre aritmetický priemer (5.4)

$$Q_{xx} = \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{P}}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}} \mathbf{P}^{-1} \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}}{(\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a})^2} = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}} \quad (\text{klasicky } Q_{xx} = \frac{1}{\sum p}),$$

keď $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.