

7. VARIANČNO – KOVARIANČNÁ MATICA

Rozdelenie náhodnej veličiny (premennej) ε (môže ju predstavovať chyba ε , oprava v , vektor meraných veličín x) je vyjadrené distribučnou funkciou $F(x)$ a pravdepodobnosť výskytu náhodnej premennej je vyjadrená frekvenčnou funkciou $f(\varepsilon)$. Vzájomný vzťah funkcií vyjadrujeme rovnicou

$$P(\varepsilon \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (7.1)$$

kde $P(\varepsilon \leq x)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že $\varepsilon \leq x$. Funkcia $f(x)$ je tiež označená ako hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny ε .

Rovnica (7.1) geometricky vyjadruje plochu medzi horizontálnou osou ε a krivkou $f(\varepsilon)$ v intervale $(-\infty, x)$. Frekvenčná funkcia charakterizuje zmenu pravdepodobnosti. Funkcie $f(x)$ a $F(x)$ sú schopné popísať úplné analytické vlastnosti náhodnej premennej ε . Číselné vlastnosti náhodnej premennej vyjadrujeme strednou hodnotou a varianciou. Strednú hodnotu náhodnej premennej ε označujeme $E(\varepsilon)$. Definovaná je súčinom náhodnej premennej a jej pravdepodobnosti v intervale $(-\infty, +\infty)$:

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (7.2)$$

Varianciu náhodnej premennej ε označujeme $\text{var}(\varepsilon)$ alebo σ^2 . Je definovaná vzťahom

$$\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2 = E\{[\varepsilon - E(\varepsilon)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varepsilon - E(\varepsilon)]^2 f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7.3)$$

Ak označíme, že ε je meračská chyba, potom $E(\varepsilon)$ môžeme teoreticky považovať za skutočnú hodnotu chyby ε a počet meraní $n \rightarrow \infty$. Platí to v prípade, že meranie nebude obsahovať hrubé a systematické chyby. Vtedy $E(\varepsilon) = 0$ a σ^2 predstavuje strednú kvadratickú odchýlku ε od strednej hodnoty $E(\varepsilon)$.

Kovariancia medzi dvoma náhodnými premennými ε_1 a ε_2 je definovaná vzťahom

$$\sigma_{12} = E\{[\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)][\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2)]\}. \quad (7.4)$$

Ak variancie náhodných premenných ε_1 a ε_2 sú σ_1^2 , σ_2^2 , kovariancia medzi nimi je σ_{12} . Koeficient korelácie medzi náhodnými premennými je definovaný

$$\rho_{12} = E\left[\frac{\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)}{\sigma_1} \frac{\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2)}{\sigma_2}\right] = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (7.5)$$

Koeficient korelácie ρ_{12} je v intervale

$$-1 \leq \rho_{12} \leq +1. \quad (7.6)$$

Majme vektor $\mathbf{\varepsilon}_{(n,1)}$ náhodných premenných $\varepsilon_i (i = 1, 2 \dots n)$

$$\mathbf{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Predpokladajme, že stredná hodnota ε_i a ε_j je $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_j) = 0$, variancie a kovariancie ε_i s ε_j budú:

$$\begin{aligned}
E\{\left[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right]^2\} &= E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2, \quad i = (1, 2 \dots n) \\
E\{\left[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right]\left[\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)\right]\} &= E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma_{ij}.
\end{aligned}
\tag{7.8}$$

Matica variancií a kovariancií $\mathbf{CE}\varepsilon$ náhodného vektora ε je definovaná ako

$$\begin{aligned}
\mathbf{CE}\varepsilon_{(n,n)} &= E\{\left[\varepsilon - E(\varepsilon)\right]\left[\varepsilon - E(\varepsilon)\right]^T\} = E(\varepsilon \varepsilon^T) = E\left(\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \middle| \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \right) = \\
&= \begin{vmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) \dots E(\varepsilon_1 \varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2 \varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) \dots E(\varepsilon_2 \varepsilon_n) \\ \dots & \dots \\ E(\varepsilon_n \varepsilon_1) & E(\varepsilon_n \varepsilon_2) \dots E(\varepsilon_n^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{7.9}$$

Ak matica $\mathbf{QE}\varepsilon_{(n,n)}$ vyhovuje vzťahu

$$\mathbf{CE}\varepsilon_{(n,n)} = \sigma_0^2 \mathbf{QE}\varepsilon_{(n,n)}, \tag{7.10}$$

kde $\sigma_0 = m_0$ je jednotková stredná chyba a $\mathbf{QE}\varepsilon_{(n,n)}$ je kofaktorová matica náhodného vektora ε . Inverznú maticu $\mathbf{QE}\varepsilon_{(n,n)}^{-1}$ označujeme $\mathbf{PE}\varepsilon_{(n,n)}$. Nazýva sa matica váhových koeficientov ε

$$\mathbf{QE}\varepsilon = \mathbf{PE}\varepsilon^{-1}. \tag{7.11}$$

7.1 Hromadenie chýb v lineárnej funkcii

Predpokladajme, že x_1, x_2, \dots, x_n je n meraných veličín s náhodnými chybami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Nech \bar{x}_i sú skutočné (vyrovnané) hodnoty (nie náhodné hodnoty) meranej veličiny x_i . Platí

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}_i \tag{7.12}$$

V maticovom zápise rovnice (7.12) budú

$$\varepsilon_{(n,1)} = \mathbf{X}_{(n,1)} - \bar{\mathbf{X}}_{(n,1)}, \tag{7.13}$$

kde

$$\varepsilon_{(n,1)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{X}_{(n,1)} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}_{(n,1)} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{vmatrix}.$$

Predpokladáme, že ε má strednú hodnotu nula. Maticu variancií a kovariancií dostaneme

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{(n,1)}, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_{(n,n)}} = E\left\{[\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon})][\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon})]^T\right\} = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Vektor \mathbf{x} bude mať rovnakú maticu variancií a kovariancií ako $\boldsymbol{\varepsilon}$, pretože \bar{x} je náhodná veličina

$$E(x) = E(\bar{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = E(\bar{x}) = \bar{x},$$

$$\mathbf{C}_{xx} = E\left\{[x - E(x)][x - E(x)]^T\right\} = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_{(n,n)}}. \quad (7.16)$$

Nech \bar{y} predstavuje vyrovnanú lineárnu funkciu veličiny

$$\bar{y} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n = \mathbf{a}\bar{\mathbf{x}}, \quad (7.17)$$

kde a_1, a_2, \dots, a_n sú konštanty definované vektorom $\mathbf{a}_{(1,n)} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Odvodená hodnota y z meraní x_1, x_2, \dots, x_n je

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \mathbf{a}\mathbf{x}. \quad (7.18)$$

Chyby ε_y vypočítame zo vzťahu

$$\varepsilon_y = y - \bar{y} = \mathbf{a}\mathbf{x} - \mathbf{a}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7.19)$$

Podľa definície variance, variancia veličiny y bude

$$\sigma_y^2 = E(\varepsilon_y^2) = E[\mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon})^T] = \mathbf{a}E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)\mathbf{a}^T = \mathbf{a}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{a}^T = |a_1 a_2 \dots a_n| \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Rovnica (7.20) vyjadruje varianciu jednoduchnej lineárnej funkcie n náhodných meraní v medziach variančno-kovariančnej matice vektora merania \mathbf{x} . Rovnica vyjadruje zákon hromadenia chýb jednoduchnej lineárnej funkcie n náhodných premenných.

Ak ε_i a ε_j sú navzájom nezávislé veličiny, potom $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$; $1 \leq i, j \leq n$) a dostaneme zvláštny prípad rovnice (7.20)

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2, \quad (7.21)$$

ktorú interpretujeme ako zákon hromadenia (prenášania) stredných chýb jednoduchnej lineárnej funkcie n nezávislých náhodných premenných.

Príklad 7.1. Máme dané: $y = 2x_1 - 3x_2 - x_3$, $\sigma_1 = 1$ mm, $\sigma_2 = 2$ mm, $\sigma_3 = 3$ mm. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ a ε_3 sú navzájom nezávislé veličiny. Úlohou je vypočítať varianciu σ_y^2 .

$$\sigma_y^2 = 2^2 \cdot 1 + (-3^2) \cdot 2^2 + (-1^2) \cdot 3^2 = 4 + 36 + 9 = 49 \text{ mm}^2, \quad \sigma_y = \sqrt{49} = 7 \text{ mm}.$$

Generalizujme teraz jednoduchú lineárnu funkciu y v rovnici (7.18), na vektor y , ktorý obsahuje m lineárnych funkcií meraných veličín x_i v tvare $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$

$$y_{(m,1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{(m,n)} \mathbf{x}_{(n,1)}, \quad (7.22)$$

kde

$$\mathbf{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Maticu variancií a kovariancií \mathbf{C}_{yy} náhodného vektora y určíme zo vzťahu

$$\mathbf{C}_{yy(m,m)} = E\{[y - E(y)][y - E(y)]^T\} = \mathbf{A}E\{[x - E(x)][x - E(x)]^T\}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{A}^T. \quad (7.23)$$

V rovnici (7.23) sme nahradili $y - \bar{y} = y - E(y) = a(x - \bar{x}) = a(x - E(x))$. Vektor $\mathbf{a}_{(1,n)}$ vyjadrením m lineárnych funkcií (na základe m meraní) je vyjadrený maticou $\mathbf{A}_{(m,n)}$. Na základe uvedených úprav bolo možné transformovať rovnicu (7.20) do rovnice (7.23).

Rovnica (7.23) vyjadruje všeobecný zákon hromadenia chýb v maticovom tvare variancií a kovariancií pre náhodný vektor m lineárnych funkcií n náhodných premenných.

Ak máme iný náhodný vektor z

$$z_{(p,1)} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{(p,n)} \mathbf{x}_{(n,1)}, \quad (7.24)$$

kde

$$\mathbf{B}_{(p,n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

kovariančnú maticu medzi y a z určíme z rovnice

$$\mathbf{C}_{yz(m,p)} = E\{[y - E(y)][z - E(z)]^T\} = \mathbf{A}E\{[x - E(x)][x - E(x)]^T\}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{B}^T. \quad (7.25)$$

Kovariančná matica \mathbf{C}_{yz} vyjadruje zákon hromadenia chýb dvoch náhodných vektorov lineárnych funkcií náhodných premenných.

7.1.1 Hromadenie chýb v nelineárnej funkcii

Predpokladajme, že máme náhodné premenné x_1, x_2, \dots, x_n s chybami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ a že vektor $\mathbf{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$ má maticu variancií a kovariancií

$$\mathbf{C}_{xx(n,n)} = \mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon(n,n)} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}. \quad (7.26)$$

Nech y predstavuje ľubovoľnú funkciu meraní x_1, x_2, \dots, x_n

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.27)$$

Nech x_{0i} je približná hodnota x_i ($1 \leq i \leq n$) a y_0 predstavuje približnú hodnotu veličiny y odvodenú z meraní x_{0i}

$$y_0 = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}). \quad (7.28)$$

dx_i označme ako rozdiel medzi skutočnou hodnotou a približnou hodnotou

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + dx_i, \\ y_i &= y_{0i} + dy_i, \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Rovnicu (7.27) linearizujeme rozvojom do Taylorovho radu s použitím približných hodnôt x_{0i}

$$\begin{aligned} y &= y_0 + dy = f(x_{01} + dx_1, x_{02} + dx_2, \dots, x_{0n} + dx_n) = \\ &= f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.30)$$

Ak sú všetky hodnoty x_{0i} spoľahlivo určené, parciálne derivácie vyšších rádov môžeme v rovnici (7.30) zanedbať a dostaneme

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Keďže chyby veličín x a y sú relatívne veľmi malé v porovnaní so skutočnými hodnotami x a y , môžeme diferenciály dy a dx nahradiť s chybami ε_y a ε_x

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \varepsilon_n = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n = \mathbf{a} \mathbf{\varepsilon}, \quad (7.31)$$

kde

$$\mathbf{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{(1,n)} = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rovnica (7.31) vyjadruje vzťah medzi chybou veličiny y a chybami meraných veličín x_i . Rovnica (7.31) korešponduje s rovnicou (7.18) pre lineárnu funkciu. Preto môžeme varianciu σ_y^2 napísať priamo podľa rovnice (7.20).

$$\sigma_y^2 = E\{[y - E(y)]^2\} = \mathbf{a} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a}^T \quad (7.32)$$

Ak x_1, x_2, \dots, x_n sú navzájom nekorelované (nezávislé) merania potom $\sigma_{ij} = 0$ pre $i \neq j$. Rovnicu (7.32) môžeme napísať

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2. \quad (7.33)$$

Rovnice (7.32) a (7.33) vyjadrujú zákon hromadenia chýb v nelineárnej funkcii s n náhodnými premennými.

Zákon hromadenia chýb môžeme rozšíriť na vektor \mathbf{y} s m nelineárnymi funkciami

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

Podobným postupom pri odvodení rovnice (7.31) môžeme získať približný vzťah medzi vektorom chýb $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ veličiny y a vektorom chýb $\boldsymbol{\varepsilon}$ meraní $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y = \begin{pmatrix} \varepsilon_{y1} \\ \varepsilon_{y2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{yn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{(m,n)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)}, \quad (7.35)$$

kde

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (7.36)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

Pre maticu variancií \mathbf{y} podľa rovnice (7.22) a rovnice (7.23) platí

$$\mathbf{C}_{yy} = E\{[y - E(y)][y - E(y)]^T\} = \mathbf{A} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{A}^T. \quad (7.37)$$

Keď porovnáme rovnicu (7.20) a (7.23) s rovnicou (7.33) a (7.37) je možné vidieť, že zákon hromadenia chýb má rovnaký tvar pre nelineárnu a lineárnu funkciu. Rozdielom je, že pri nelineárnych funkciách je potrebné určiť deriváciu funkcie podľa jednotlivých premenných, na ktoré aplikujeme zákon hromadenia chýb.

7.2 Elipsa chýb

Predpokladajme, že polohové súradnice bodu $P(y, x)$ majú nasledujúcu kovariančnú maticu

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{vmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{vmatrix}, \quad (7.38)$$

kde $\sigma_0^2 \equiv m_0^2$ znamená faktor variance (jednotková kvadratická stredná chyba) a \mathbf{Q} znamená kofaktor matice súradníc (y, x) . V geodézii často počítame strednú polohovú chybu

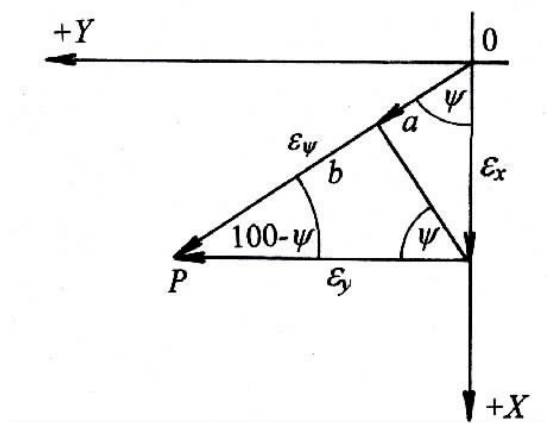
$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy} + Q_{xx}}. \quad (7.39)$$

V inžinierskej geodézii (napr. pri stavbe tunelov a mostov) je veľmi dôležité docieľiť vysokú presnosť vo vyžadovanom smere (napr. smer razenia tunela). σ_y a σ_x , resp. σ_p , neurčia presnosť bodu v danom smere. Všeobecne je to možné vyjadriť strednou chybou neznámeho bodu v ľubovoľnom smere.

7.2.1 Vyjadrenie chyby v polohe bodu

Nech ε_y , ε_x predstavujú dve zložky chýb súradníc bodu $P(y, x)$. Priemet vektora chýb v ľubovoľnom smere vyjadrenom smerníkom ψ je (obr. 7.1)

$$\varepsilon_\psi = a + b = \varepsilon_y \sin \psi + \varepsilon_x \cos \psi = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{vmatrix}. \quad (7.40)$$



Obr. 7.1. Vektor chýb v smere ψ

Aplikujeme zákon hromadenia chýb podľa rovnice (7.23) na lineárnu funkciu ε_ψ

$$\begin{aligned} \sigma_\psi^2 &= \begin{vmatrix} \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix} \sigma_0^2 \begin{vmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_0^2 (\sin^2 \psi Q_{yy} + \cos^2 \psi Q_{xx} + 2 \sin \psi \cos \psi Q_{yx}) = \\ &= \sigma_0^2 (\sin^2 \psi Q_{yy} + \cos^2 \psi Q_{xx} + \sin 2\psi Q_{yx}). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Z rovnice (7.41) je vidieť, že variancia σ_ψ^2 sa mení s hodnotou smerníka ψ . Keď položíme deriváciu σ_ψ^2 rovnú nule nájdeme extrémny variancie, t.j. pre smerník ψ_0 nájdeme maximum a minimum variancie:

$$\sigma_0^2 (2 \sin \psi_0 \cos \psi_0 Q_{yy} - 2 \cos \psi_0 \sin \psi_0 Q_{xx} + 2 \cos 2\psi_0 Q_{yx}) = 0,$$

$$\sigma_0^2 (\sin 2\psi_0 Q_{yy} - \sin 2\psi_0 Q_{xx} + 2 \cos 2\psi_0 Q_{yx}) = 0. \quad (7.42)$$

Upravenú rovnicu (7.42) delíme $\sigma_0^2 \sin 2\psi_0$ a dostaneme

$$Q_{yy} - Q_{xx} + 2 \cot 2\psi_0 Q_{yx} = 0, \\ \operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{2\sigma_{yx}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \quad (7.43)$$

Keď $\operatorname{tg} 2\psi_0 = \operatorname{tg} 2(\psi_0 + 100^\circ)$, rovnica (7.43) má dve riešenia, ktoré zodpovedajú smeru minimálnej a maximálnej hodnoty variancie. Tieto dva smery (smerník ψ_0 a $\psi_0 + 100^\circ$) sú na seba kolmé.

V záujme vyriešenia rovnice (7.41) upravme goniometrické funkcie, aby sme využili funkcie (7.44). Do rovnice (7.41) dosadíme výrazy

$$\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos 2\psi}{2}, \quad \cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2}, \text{ keď} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}}} = \\ &= \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}} = \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{C}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

kde

$$C = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}. \quad (7.46)$$

Z rovníc (7.43) a (7.45) vyjadríme funkciu

$$\sin 2\psi = \operatorname{tg} 2\psi \cos 2\psi = \frac{2Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{C} = \frac{2Q_{yx}}{C}. \quad (7.47)$$

Ďalšie funkcie sú

$$\begin{aligned} \sin^2 \psi &= \frac{1 - \cos 2\psi}{2} = \frac{1 - \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{C}}{2} = \frac{C - Q_{xx} + Q_{yy}}{2C}, \\ \cos^2 \psi &= \frac{1 + \cos 2\psi}{2} = \frac{1 + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{C}}{2} = \frac{C + Q_{xx} - Q_{yy}}{2C}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Funkcie (7.47) a (7.48) dosadíme do rovnice (7.41) a upravme

$$\begin{aligned} E^2 &= \sigma_0^2 \left(Q_{yy} \frac{C - Q_{xx} + Q_{yy}}{2C} + Q_{xx} \frac{C + Q_{xx} - Q_{yy}}{2C} + Q_{yx} \frac{2Q_{yx}}{C} \right) = \\ &= \frac{\sigma_0^2 (C(Q_{xx} + Q_{yy}) + Q_{yy}^2 - Q_{yy}Q_{xx} + Q_{xx}^2 - Q_{yy}Q_{xx} + 4Q_{yx}^2)}{2C} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}{C} \right) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2}} \right).$$

$$E^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right), \quad (7.49)$$

$$F^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{yx}^2} \right), \quad (7.50)$$

alebo

$$E^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{yx}^2} \right), \quad (7.51)$$

$$F^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{yx}^2} \right). \quad (7.52)$$

Ak je prvá strana rovnice (7.43) kladná

- smer maximálnej hodnoty variancie (ψ_e) je v 1. alebo 3. kvadrante, smer minimálnej hodnoty variancie (ψ_f) je v 2. alebo 4. kvadrante.

Ak pravá strana rovnice (7.43) je záporná

- smer maximálnej hodnoty variancie (ψ_e) je v 2. alebo 4. kvadrante, smer minimálnej hodnoty variancie (ψ_f) je v 1. alebo 3. kvadrante.

Maximálnu hodnotu dosiahne variancia E^2 vtedy, ak uhol $\psi = \psi_e$ a výraz C je kladný. Minimálnu hodnotu dosiahne variancia F^2 vtedy ak uhol $\psi = \psi_f$ a výraz C je záporný. Hodnoty variancií E^2 a F^2 vyjadrujú rovnice (7.49) a (7.50).

Môžeme vyjadriť varianciu σ_ψ^2 v ľubovoľnom smere ψ pomocou výrazov E a F

$$\sigma_\psi^2 = E^2 \cos^2 \alpha + F^2 \sin^2 \alpha, \quad (7.53)$$

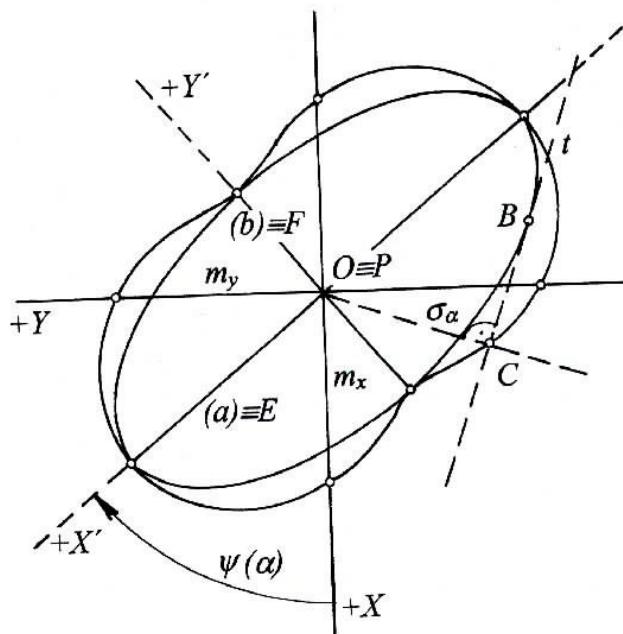
kde $\alpha = \psi - \psi_e$.

Pri praktických výpočtoch variancií σ_0^2 (jednotková stredná kvadratická chyba) môže byť nahradená odhadom variančného faktora $\sigma_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V}}{n'}}$.

7.2.2 Elipsa polohovej chyby, krivka polohovej chyby

Majme danú varianciu $\sigma_0^2 = m_0^2$ (jednotkovú strednú kvadratickú chybu) a kovariančnú maticu \mathbf{Q} polohovo určeného bodu P . Podľa rovnice (7.41) vypočítame strednú chybu (smerodajnú odchýlku) σ_α v ľubovoľnom smere α . Keď vykreslíme všetky body o polárnych súradniciach (α, σ_α), pre $0^\circ \leq \alpha < 400^\circ$ dostaneme uzavretú krivku, ktorú nazývame krivka polohovej chyby bodu P . Ako ukazuje obr. 7.2 je symetrická s ohľadom na maximálne a minimálne hodnoty variancií.

Vzdialenosť od stredu krivky O po bod na krivke v smere α je stredná polohová chyba bodu v danom smere.



Obr. 7.2. Elipsa strednej chyby

Krivka polohovej chyby nie je vhodná na praktické použitie, pretože rovnice (7.41) a (7.53) nie sú jednoduché matematické funkcie. Nakoľko krivka polohovej chyby je tvarom blízka elipse, aproximujeme hlavnú poloosu elipsy (a) hodnotou E , v smere α_e a vedľajšiu poloosu elipsy (b) hodnotou F v smere α_f . Takto definovaná elipsa sa nazýva elipsa polohovej chyby bodu P . Keď použijeme smery E a F ako smery súradnicových osí, elipsu polohovej chyby vyjadríme rovnicou

$$\frac{\varepsilon_y^2}{F^2} + \frac{\varepsilon_x^2}{E^2} = 1. \quad (7.55)$$

Strednú chybu σ_α na elipse chyby určíme geometricky. V bode B na elipse chyby vedieme dotyčnicu t . Päta kolmice C (spustená z bodu O na dotyčnicu predstavuje bod na krivke chýb. Krivka chýb je definovaná ako úpätnica elipsy.

Vzdialenosť OC smere α vyjadruje hodnotu σ_α , t.j. strednú polohovú chybu bodu P v smere α .

7.2.3 Pravdepodobnosť polohy bodu vnútri elipsy chyby

Predpokladajme, že súradnice bodu $P(y, x)$ majú maticu variancií \mathbf{C} definovanú rovnicou (7.38). Matica váhových koeficientov chýb $\varepsilon_y, \varepsilon_x$ je inverzná matica \mathbf{C}^{-1} . Ak meranie nie je zaťažené hrubou systematickou chybou stredná, hodnota chýb súradníc y, x je $E(\varepsilon) = E(\varepsilon_x, \varepsilon_y)^T = 0$. Keď chyby merania majú normálne rozdelenie, ε bude spájať frekvenčnú funkciu dvojrozmerného normálneho rozdelenia

$$f(\varepsilon_y, \varepsilon_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\mathbf{C}|}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon^T \mathbf{C}^{-1} \varepsilon)} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_x \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{\varepsilon_y}{\sigma_y} \right)^2 - 2\rho \frac{\varepsilon_y \varepsilon_x}{\sigma_y \sigma_x} + \left(\frac{\varepsilon_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]}, \quad (7.56)$$

kde $|C|$ znamená determinant C a ρ je koeficient korelácie medzi ε_y a ε_x :

$$|C| = \sigma_y^2 \sigma_x^2 - \sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 (1 - \rho^2), \quad \rho = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y \sigma_x}. \quad (7.57)$$

Inverznú maticu C^{-1} vypočítame pomocou determinantu. Matica

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{vmatrix}, \quad (7.58)$$

kde $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$, má determinant

$$D = a_{12} a_{22} - a_{12} a_{21} = \sigma_y^2 \sigma_x^2 - \sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

a doplnky

$$D_{11} = a_{22} = \sigma_x^2, D_{12} = -a_{21} = -\sigma_{yx}, D_{21} = -a_{12} = -\sigma_{yx}, D_{22} = a_{11} = \sigma_y^2. \quad (7.59)$$

Inverzná matica je daná transponovanou maticou doplnkov delenou determinantom matice

$$C^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_y^2 \sigma_x^2 (1 - \rho^2)} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & -\sigma_{yx} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{vmatrix}. \quad (7.60)$$

Exponent rovnice (7.56) dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\mathbf{\varepsilon}^T C^{-1} \mathbf{\varepsilon}) &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sigma_y^2 \sigma_x^2 (1 - \rho^2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & -\sigma_{yx} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\varepsilon_y^2 \sigma_x^2}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} - 2\varepsilon_y \varepsilon_x \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} + \frac{\varepsilon_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} \right) = -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\varepsilon_y^2}{\sigma_y^2} - 2 \frac{\varepsilon_y \varepsilon_x}{\sigma_y \sigma_x} \rho + \frac{\varepsilon_x^2}{\sigma_x^2} \right). \end{aligned} \quad (7.61)$$

V druhom člene rovnice (7.61) namiesto σ_{yx} sme použili z rovnice (7.57) $\sigma_{yx} = \rho \sigma_y \sigma_x$.

Ak $f(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$ je konštanta, potom môžeme pre exponent rovnice (7.56) napísať

$$\left(\frac{\varepsilon_y}{\sigma_y} \right)^2 - 2\rho \frac{\varepsilon_y \varepsilon_x}{\sigma_y \sigma_x} + \left(\frac{\varepsilon_x}{\sigma_x} \right)^2 = t^2, \quad (7.62)$$

kde t^2 je ľubovoľná kladná konštanta, ktorú geometricky predstavuje elipsa. Pre rôzne hodnoty t dostaneme rôzne elipsy. Vnútri každej elipsy bude mať polohová chyba bodu $(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$ rôznu pravdepodobnosť. Preto elipsa definovaná rovnicou (7.62) sa volá elipsa chyby bodu P . Táto definícia elipsy neodporuje definícii elipsy chyby bodu P vyjadrenej rovnicou (7.55) pokiaľ poloha osí ε_y a ε_x bude definovaná uhlom vypočítaným podľa rovnice (7.43). Rovnicu (7.62) transformujeme na rovnicu

$$\frac{\varepsilon_y^2}{F^2} + \frac{\varepsilon_x^2}{E^2} = t^2, \quad (7.63)$$

ktorá naznačuje, že elipsa polohovej chyby odvodená z krivky polohovej chyby je špeciálny prípad rovnice (7.63) pre $t = 1$.

Pravdepodobnosť, že bod P padne dovnútra elipsy definovanej rovnicou (7.63) pre dané t je

$$p = P\left\{\frac{\varepsilon_y^2}{F^2} + \frac{\varepsilon_x^2}{E^2} \leq t^2\right\} = 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (7.64)$$

Číselné hodnoty pravdepodobnosti p pre $t = 0, 1, 2, 3$ a 4 sú uvedené v tab. 7.1.

Pravdepodobnosť polohy bodu P

vo vnútri elipsy chýb

Tabuľka 7.1

t	P
0	0,0000
1	0,3935
2	0,8647
3	0,9889
4	0,9997

Tabuľku 7.1 môžeme interpretovať tak, že predelíme rovnicu (7.59) s t^2 a dostaneme

$$\frac{\varepsilon_y^2}{t^2 F^2} + \frac{\varepsilon_x^2}{t^2 E^2} = 1. \quad (7.65)$$

Potom elipsa polohovej chyby bude mať veľkosti poloosí $a = t E$ a $b = t F$. Ak použijeme $t = 2$ s 86% pravdepodobnosťou bod P bude na ploche dvojnásobného rozmeru poloosí elipsy polohovej chyby.