

2. NORMÁLNE ROZDELENIE CHÝB

2.1 Odvodenie normálneho rozdelenia chýb z hypotézy rovnakých elementárnych chýb (podľa Hagena)

Zvoľme prípad, keď skutočná chyba ε vzniká ako súčet s elementárnych chýb δ_j rovnakej absolútnej veľkosti $|\delta_j| = \delta$, ale náhodného znamienka, takže sa pritom uplatní k kladných chýb a $(s - k)$ záporných elementárnych chýb. Pre jednotlivé počty k kladných chýb bude platiť binomické rozdelenie pravdepodobnosti pre s opakovaných pokusov $p = q = 1/2$ (rovnaká pravdepodobnosť pre vznik kladnej alebo zápornej elementárnej chyby – analógie hodu s mincami).

Skutočná chyba a jej pravdepodobnosť v tomto prípade podľa (1.6)

$$\varepsilon_k = \sum_{j=1}^s \delta_j = k\delta - (s - k)\delta = (2k - s)\delta, \quad P(\varepsilon_k) = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k} = y_k \quad (2.1)$$

a podobne chyba s $(k + 1)$ kladnými elementárnymi chybami a jej pravdepodobnosť

$$\varepsilon_{k+1} = (k + 1)\delta - (s - k - 1)\delta = (2k + 2 - s)\delta, \quad P(\varepsilon_{k+1}) = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k+1} = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k} \frac{s-k}{k+1} \quad (2.2)$$

Dôkaz: Vypočítajte koeficient $\binom{6}{3}$ a $\binom{6}{4}$ ako

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{120}{6} = 20,$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15.$$

V menovateli sme pridali číslo $(k+1) = 4$ a ubrali číslo $(s-k) = 3$. $(s-k)$ odstránime umiestnením do čitateľa.

Intervalu

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \Delta\varepsilon = (2k + 2 - s)\delta - (2k - s)\delta = 2\delta, \quad (2.3)$$

patrí stredná hodnota chyby

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}) = \frac{((2k - s)\delta + (2k + 2 - s)\delta)}{2} = (2k + 1 - s)\delta \quad (2.4)$$

a stredná hodnota pravdepodobnosti

$$P = y = \frac{1}{2}(P_k + P_{k+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^s} \binom{s}{k} \left(1 + \frac{s-k}{k+1} \right) \right) = \frac{1}{2 \cdot 2^s} \binom{s}{k} \frac{s+1}{k+1}. \quad (2.5)$$

Rozdiel (prírastok) pravdepodobností je v intervale

$$\Delta P = \Delta y = P_{k+1} - P_k = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k} \left(\frac{s-k}{k+1} - 1 \right) = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k} \frac{s-2k-1}{k+1}. \quad (2.6)$$

Z rovníc (2.4) a (2.3) vyplýva, že

$$s - 2k - 1 = -\frac{\varepsilon}{\delta}, \quad 2 = \frac{\Delta\varepsilon}{\delta} \quad (2.7)$$

a podiel

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{2(s - 2k - 1)}{s + 1} = \frac{2\left(-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)}{s + 1} = \frac{\frac{\Delta\varepsilon}{\delta}\left(-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)}{s + 1} = \frac{-\varepsilon\Delta\varepsilon}{s\delta^2 + \delta^2} . \quad (2.8)$$

Rovnica (2.8) vyjadruje vzťah medzi pravdepodobnosťou a jej prírastkom pri konečnom počte s elementárnych chýb. K odvodeniu rovnice spojitej krivky musíme položiť $s \rightarrow \infty$ a súčasne $\delta^2 \rightarrow 0$ (ináč by vznikli nekonečne veľké chyby). Rovnica (2.8) sa zmení na diferenciálnu rovnicu pre hustotu pravdepodobnosti a jej prírastok

$$\frac{dy}{y} = \frac{\varepsilon d\varepsilon}{s\delta^2} = -2h^2 \varepsilon d\varepsilon . \quad (2.9)$$

Zavedli sme parameter presnosti $h^2 = \frac{1}{2s\delta^2}$, ktorý je pre všetky chyby konštantný, pretože aj počet s a veľkosť elementárnych chýb δ sú konštantné. Integráciou rovnice (2.9)

$$\lg y = -h^2 \varepsilon^2 + c, \quad y = e^c e^{-h^2 \varepsilon^2} = C e^{-h^2 \varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon) \quad (2.10)$$

sme dospeli k normálnemu rozdeleniu (pravdepodobnosti) náhodných chýb. Konečný tvar funkcie hustoty pravdepodobnosti náhodných chýb pri $E(\varepsilon) = 0$ je

$$\varphi(\varepsilon) = y = C e^{-h^2 \varepsilon^2} . \quad (2.11)$$

2.2 Normálne rozdelenie pravdepodobnosti

Binomické rozdelenie a empirické rozdelenie početných náhodných veličín v prírode, technike i v spoločenskom živote dávajú symetrické frekvenčné polygóny zvonovitého tvaru, ktoré sa dajú dobre nahradiť symetrickou, tzv. **Gaussovou krivkou** s obecným analytickým výrazom pre hustotu pravdepodobnosti

$$y = f(x) = C e^{-h^2(x-c)^2} . \quad (2.12)$$

Parametre $C, h^2 = \frac{1}{2s\delta^2}$ sú konštantné pre celý základný súbor všetkých možných hodnôt x_i náhodnej veličiny z (obr. 2.1).

Na obr. 2.1 $c = E(x)$, $y_0 = y_{\max} = C$ patrí úsečke $x = c$. Konštantu C určíme z podmienky

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-c)^2} dx = 1, \quad (2.13)$$

$$x - c = \varepsilon = \Delta, \quad dx = d\Delta .$$

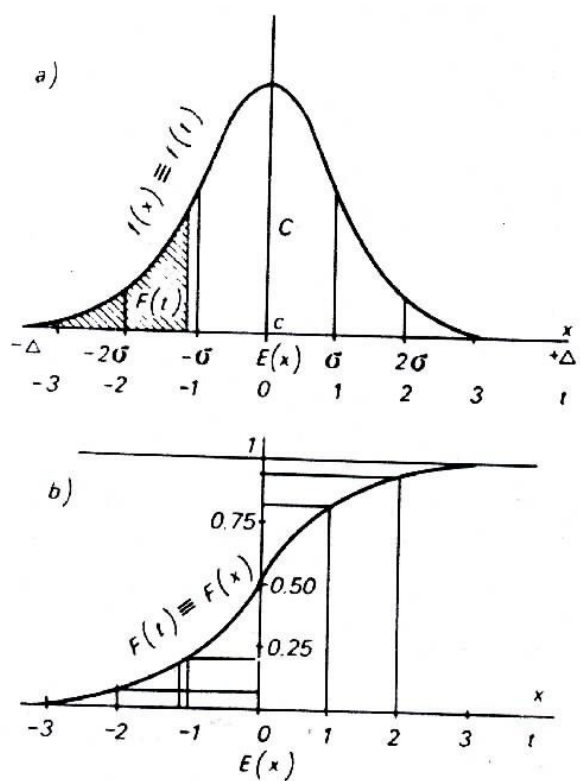
Riešením základného integrálu teórie chýb (2.13) dostaneme konštantu C v tvare $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

Do rovnice pre varianciu

$$V(x) = \sigma^2 = E(\Delta^2) = \sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(x) dx$$

za Δ dosadíme $(x-c)$ a po vyriešení integrálu dostaneme

$$\sigma^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c)^2 e^{-h^2(x-c)^2} dx = \frac{1}{2h^2}.$$



Obr. 2.1. a) Frekvenčná krivka, b) sumačná krivka v normálnom rozdelení

Takto sme našli vzťah medzi **parametrom presnosti h** a **strednou kvadratickou odchýlkou** od strednej hodnoty

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \quad \sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \quad (2.14)$$

Stredná kvadratická odchýlka (štandard, smerodajná odchýlka) $\sigma = \sqrt{E(x - E(x))^2}$ je **parametrom normálneho rozdelenia v príslušnom základnom súbore**. Funkcia hustoty pravdepodobnosti (frekvenčná funkcia) dostane konečný tvar:

$$y = f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \{x - E(x)\}^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\{x - E(x)\}^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.15)$$

Je výhodné zaviesť štandardnú premennú

$$t = \frac{x - E(x)}{\sigma}, \quad x - E(x) = t\sigma, \quad dx = \sigma dt, \quad E(t^2) = 1 \quad (2.16)$$

t.j. odchýlku os strednej hodnoty $E(x)$ vyjadríme v násobku strednej kvadratickej odchýlky σ , takže štandardná premenná je bezrozmerná a jej variancia $E(t^2) = 1$. Potom

$$y = f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{0,3989}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} = y_0 e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.17)$$

Funkcia $e^{-\frac{t^2}{2}}$ alebo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ sa tabeluje (tab. I a tab. II).

Sumačná (distribučná) funkcia normálneho rozdelenia podľa rovnice $F(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ a obr. 2.1b

$$P(x < u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{\{x-E(x)\}^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (2.18)$$

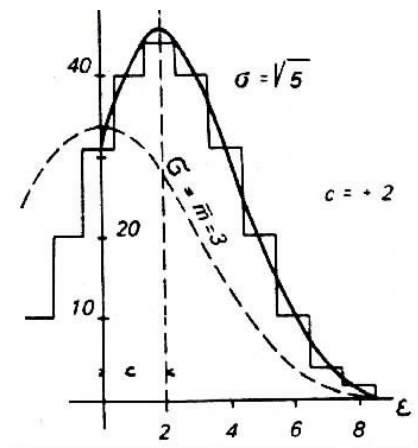
dáva pravdepodobnosť výskytu menších hodnôt v základnom súbore ako u . Po zavedení štandardnej premennej $t = \frac{\{x-E(x)\}}{\sigma}$, $dx = \sigma dt$ dostaneme sumačnú funkciu

$$P(\{x-E(x)\} \leq t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(t), \quad F(\infty) = 1. \quad (2.19)$$

Sumačná funkcia $F(t)$ sa tabeluje (tab. III). Pravdepodobnosť, že hodnota náhodnej veličiny v základnom súbore padne do intervalu (x_1, x_2)

$$x_1 = E(x) + t_1\sigma, \quad x_2 = E(x) + t_2\sigma, \quad P(x_1 < x < x_2) = F(t_2) - F(t_1)$$

sa takto veľmi rýchlo vypočíta z tabuľky hodnôt $F(t)$. Gaussova krivka je derivačná krivka ku krivke sumačnej. Rovnako možno tabelovať funkciu $\int_0^t f(t) dt$ (tab. IV) alebo $\int_{-t}^t f(t) dt$ (tab. V) a pomocou nich určovať pravdepodobnosti v ľubovoľných intervaloch.



Obr. 2.2. Pôsobenie systematickej chyby na súbor meraní

Pôsobenie systematickej chyby na súbor meraní. Zvoľme prípad, keď okrem náhodných elementárnych chýb δ_i o rovnakej absolútnej veľkosti $|\delta_i|$ pôsobí na každé meranie ešte kladná systematická chyba $+c$. Výsledné hodnoty sú $\varepsilon = \sum \delta_i + c$.

Osi symetrie (maximálna poradnica) grafu i aproximujúcej Gaussovej krivky prislúcha teraz stredná hodnota $E(\varepsilon) = c$. Teraz napr. podľa obr. 2.2 bude centrom rozdelenia $E(\varepsilon) = c = \sum c_i = +2$ a variancia $\sigma^2 = \sum \sigma_i^2 = \sum E(\delta_i^2) = 5$. Skutočné rozdelenie pravdepodobnosti je dané stupňovitým grafom. Nemôže ho aproximovať normálne rozdelenie (Gaussova krivka) s parametrom

$$\bar{m}^2 = E(\varepsilon^2) = E(\sum \delta + c)^2 = \sum E(\delta^2) + c^2 = \sigma^2 + c^2, \quad (2.20)$$

i keď by sme os Y posunuli o hodnotu c . Gaussova krivka posunutá o hodnotu systematickej chyby s parametrom σ^2 (strednou kvadratickou náhodnou chybou) bude

$$\sigma^2 = E\{\varepsilon - E(\varepsilon)\}^2 = E(\varepsilon - c)^2 = E(\varepsilon^2) - 2cE(\varepsilon) + c^2 = E(\varepsilon^2) - c^2 = \bar{m}^2 - c^2. \quad (2.21)$$

V tomto prípade je ε **celková chyba** zahrňujúca aj systematickú zložku a $(\varepsilon - c)$ je náhodná zložka chyby. Rozdelenie pravdepodobnosti chýb bude teraz vyjadrené rovnicou

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon-c)^2}{2\sigma^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\varepsilon-c)^2}, \quad c = E(\varepsilon), \quad (2.22)$$

$$\text{kde } \bar{m}^2 = E(\varepsilon^2), \quad \sigma^2 = E(\varepsilon - c)^2 = \bar{m}^2 - c^2 = \sum E(\delta^2), \quad h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Základný súbor skutočných chýb má v tomto prípade normálne rozdelenie s parametrami $N(c, \sigma^2 = E(\varepsilon^2) - c^2)$.

Parametrom normálneho rozdelenia chýb nemôže byť stredná kvadratická chyba celková $\bar{m} = \sqrt{E(\varepsilon^2)}$, ak sú merania zaťažené systematickou chybou c , ale vždy len stredná kvadratická chyba náhodná $\sigma = \sqrt{E(\varepsilon - c)^2}$ (určená z chýb zbavených systematickej zložky).

2.3 Aplikácia normálneho rozdelenia na chyby

Prirodzenou povahou meračských chýb je, že vznikajú súčtom premenlivých elementárnych chýb, ktorých hodnoty sa môžu náhodne kombinovať. Základný súbor všetkých možných hodnôt má rozdelenie pravdepodobnosti blízke normálnemu rozdeleniu vtedy, ak sú splnené určité predpoklady:

a) elementárne (dielčie) chyby sú v malom počte a sledujú približne binomické alebo normálne rozdelenie (majú zhustenie početností okolo strednej hodnoty),

b) parametre rozdelenia $E(\varepsilon)$, σ sa pri meraní príliš nemenia. Ide o pomernú stabilitu podmienok merania, t.j. sklady elementárnych chýb, ich stredných hodnôt (systematické zložky), ich počtu a variancií (presnosti merania). Zmes „rôznorodých“ skupín chýb s príliš rôznou systematickou zložkou a rôznou strednou kvadratickou chybou sa odlišuje od normálneho rozdelenia.

Veľké odchýlky od normálneho rozdelenia vzniknú v prípadoch menej presných prístrojov, málo dôrazného merania alebo nahromadenia systematických chýb s rovnomerným rozdelením výslednej systematickej chyby, alebo pri značnej premenlivosti parametrov rozdelenia pri meraní.

Parametre rozdelenia chýb. Hodnota $\ell_i = X - \varepsilon_i$, odmeraná v i -tom okamžiku je určená náhodnou hodnotou skutočnej chyby $\varepsilon_i = (\sum \delta_j)_i$, ktorá vznikla ako i -tá kombinácia náhodných hodnôt s elementárnych chýb. Podmienky platiace v okamžiku merania (kvalita prístroja a merača, jeho psychický stav, terén, atmosférické pomery, atď.), určujú **dopredu** fiktívny základný súbor možných hodnôt chýb, aké by mohli vzniknúť kombináciami všetkých možných hodnôt elementárnych chýb. Z nich sa uplatní len jedna hodnota ε_i a meranie ℓ_i . Parametre tohto normálneho základného súboru (stred rozdelenia a variancia) sú súčty parametrov elementárnych chýb:

$$E(\delta_j) = c_j, \quad \sigma_j^2 = E(\delta_j - c_j)^2, \quad \bar{c}_i = \left(\sum_{j=1}^s c_j \right)_i, \quad \sigma_i^2 = \left(\sum_{j=1}^s \sigma_j^2 \right)_i, \quad (2.23)$$

kde \bar{c} je stred normálneho rozdelenia.

Parametre rozdelenia u niektorých elementárnych chýb sú závislé na okamžitých podmienkach merania, ktoré sa môžu meniť. Napr. zmena teplotných pomerov zmení strednú hodnotu refrakcie alebo systematické chyby prístroja, zhoršenie podmienok merania zväčší varianciu chyby c cielení alebo čítaní a pod. Ďalšiemu meraniu prislúcha iný normálny základný súbor možných chýb s inými parametrami c_{i+1} , σ_{i+1} , z ktorého sa náhodne uskutoční meranie ℓ_{i+1} s chybou ε_{i+1} .

Základný súbor možných chýb v časovom rade n opakovaných meraní rovnakého druhu je zmes n základných súborov s n rôznymi dvojicami parametrov c_i , σ_i . Ak nebude ich variancia príliš veľká, bude to približne normálny súbor so strednými parametrami

$$E(\varepsilon) = \bar{c} = \frac{\sum \bar{c}_i}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum \sigma_i^2}{n},$$

ktoré zodpovedajú stredným podmienkam v dobe merania celého radu. Hustota pravdepodobnosti bude

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\varepsilon - \bar{c})^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - \bar{c})^2}{2\sigma^2}}, \quad h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad (2.24)$$

$$\text{kde } \sigma^2 = E(\varepsilon - \bar{c})^2 = E(\varepsilon^2) - \bar{c}^2 = \bar{m}^2 - \bar{c}^2.$$

Rovnaká presnosť merania ($\sigma = \text{konšt.}$) znamená rovnaký prístroj, rovnakú metódu a rovnaké stredné podmienky v rade meraní. Rôzne veľké chyby ε_1 až ε_n vznikajú náhodným stretnutím elementárnych chýb rôzneho znamienka a rôznej hodnoty.

Určitému typu prístroja a metóde merania prislúcha celý „základný súbor“ okamžitých parametrov presnosti $\sigma_{\min} < \sigma_i < \sigma_{\max}$ podľa neustále sa meniacich podmienok v čase alebo priestore.

Nebudeme uvažovať systematickú zložku a budeme predpokladať, že meračské chyby sú náhodné $[E(\varepsilon) = \bar{c} = 0, E(\varepsilon^2) = \bar{m}^2 = \sigma^2]$. Hustota pravdepodobnosti bude

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \bar{m}^2 = E(\varepsilon^2). \quad (2.25)$$

Zavedieme štandardnú (bezrozmernú) premennú

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad \varepsilon = t\sigma, \quad E(t^2) = 1,$$

takže hodnoty chýb vyjadríme v násobku strednej kvadratickej chyby. Funkcia hustoty pravdepodobnosti po úprave bude

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{0,39891}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} = y_0 e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.26)$$

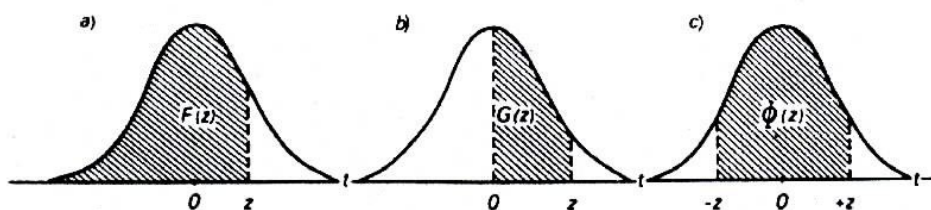
Sumačná (distribučná) funkcia pri $d\varepsilon = \sigma dt$

$$P(t < z) = F(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \int_{-\infty}^z \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.27)$$

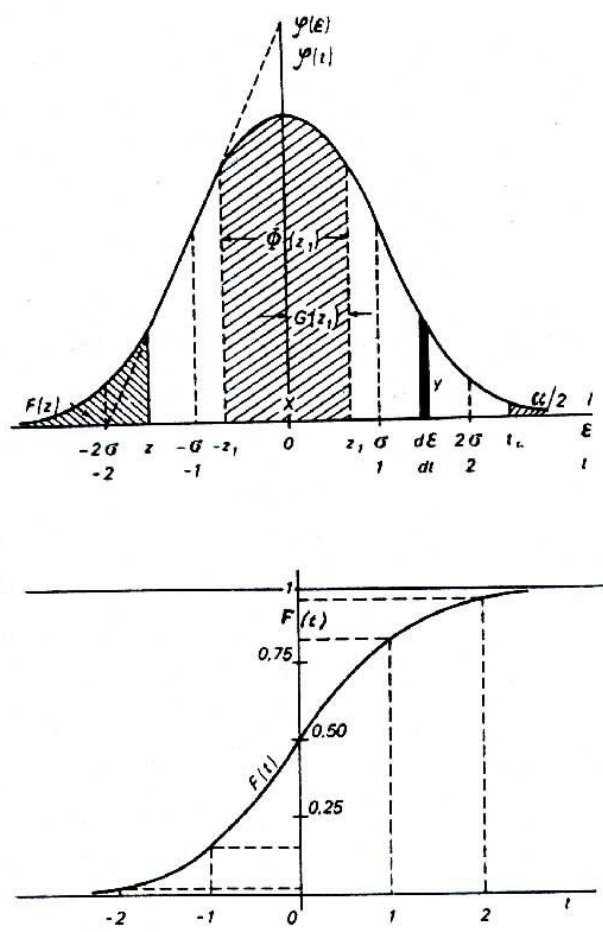
je vyjadrená plochou pod Gaussovou krivkou od $-\infty$ až po hodnotu $t = z$ (šrafovanú na obr. 2.3).

Funkcie $e^{-\frac{t^2}{2}}$, $F(z)$ sa tabelujú a taktiež ďalšie funkcie (obr. 2.3):

$$G(z) = \int_0^z \varphi(t) dt, \quad \Phi(z) = \int_{-z}^{+z} \varphi(t) dt = 2G(z). \quad (2.28)$$



Obr. 2.3. Distribučná funkcia vyjadrená plochou pod Gaussovou krivkou



Obr. 2.4. Normálne rozdelenie pri náhodných chybách

Rovnice (2.25) a (2.26) vyjadrujú **frekvenčnú krivku** (Gaussovu), rovnice (2.27) **sumačnú (distribučnú) krivku**.

Gaussova krivka má tieto vlastnosti, dôležité pre jej konštrukciu:

- blíži sa asymptoticky k osi X ,
- v bodoch $M(\varepsilon = \pm \sigma, t = \pm 1)$ má krivka inflexný bod,
- dotyčnice vedené v týchto bodoch pretínajú os X v bodoch $(\varepsilon = \pm 2\sigma, t = \pm 2)$,

d) polomer krivosti vo vrchole je $r = \frac{\sigma^2}{y_0}$ (v dĺžkach odmeraných na grafe).

Uvedené vlastnosti uľahčujú konštrukciu krivky (obr. 2.4).

Pri odvodení normálneho rozdelenia náhodných chýb sa považovali chyby za spojitú náhodnú premennú, ktorá môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu v určitých medziach. Výskyt chyby v medziach ε_i a $\varepsilon_i + d\varepsilon$ by mal pravdepodobnosť

$$P(\varepsilon_i < \varepsilon < \varepsilon_i + d\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_i) d\varepsilon = y_i d\varepsilon, \quad (2.28)$$

(viď obr. 8). Pravdepodobnosť výskytu chyby ε je vyjadrená elementárnym obdĺžnikom a poradnicou $\varphi(\varepsilon)$ a vo fyzikálnych pojmoch vyjadruje **hustotu pravdepodobnosti**. Vlastnosti meračských chýb sú viazané na citlivosť merania danú najmenším čítaním alebo odhadovaním dielika κ stupnice prístroja. Chyby ε nemôžu preto nadobúdať svoje hodnoty spojitou, ale diskretnou (skokom) po intervale $\Delta\varepsilon = \frac{\kappa}{n}$, kde n je počet opakovaných meraní, z ktorých vyplýva výsledok merania ako aritmetický priemer.

Počet chýb ε bude vždy konečný a pravdepodobnosť výskytu určitej hodnoty chyby ε sa dá aproximovať konečnou hodnotou

$$P(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \Delta\varepsilon = \varphi(t) \Delta t = 0,39894 e^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t, \quad (2.30)$$

kde $\Delta t = \Delta\varepsilon : \sigma$.

Skutočné rozdelenie pravdepodobností chýb bude vždy odlišné od normálneho rozdelenia a bude rôzne pre rozličné druhy merania.

Na obr. 2.4 plocha celej krivky

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 = 100 \% \quad (2.31)$$

vyjadruje úhrnnú pravdepodobnosť všetkých možných chýb. V skutočnosti platí

$$P(-\varepsilon_{\max} < \varepsilon < +\varepsilon_{\max}) = 1, \quad (2.32)$$

kde hranice ε_{\max} je **najväčšia možná nevyhnutná chyba**.

2.4 Intervalové odhady. Najväčšia možná chyba a najväčšia dovolená chyba

Intervalový odhad u chýb je výpočet úhrnnej pravdepodobnosti, s akou **dopredu** očakávame výskyt chyby vo zvolenom intervale alebo naopak k zvolenej pravdepodobnosti určujeme príslušný interval, v ktorom sa nachádza chyba. Dôležité sú pravdepodobnosti $\Phi(t)$ intervalu so symetrickými hranicami

$$P(-t\sigma < \varepsilon < t\sigma) = \Phi(t); \quad P(|\varepsilon| > t\sigma) = 1 - \Phi(t) = \alpha. \quad (2.33)$$

Pravdepodobnosť výskytu chýb v intervale $-t\sigma, +t\sigma$ vyjadrená v percentách je nasledovná:

$$P(-\sigma < \varepsilon < \sigma) = P(-1 < t < 1) = 68\%,$$

$$P(|\varepsilon| > \sigma) = 32\%,$$

$$P(-2\sigma < \varepsilon < 2\sigma) = P(-2 < t < 2) = 95\%,$$

$$P(|\varepsilon| > 2\sigma = 5\%,$$

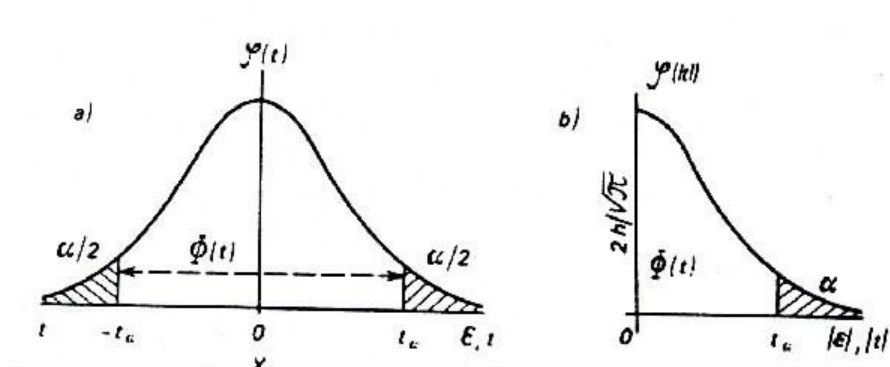
$$P(-2,5\sigma < \varepsilon < 2,5\sigma) = P(-2,5 < t < 2,5) = 99\%,$$

$$P(|\varepsilon| > 2,5\sigma = 1\%,$$

$$P(-3\sigma < \varepsilon < 3\sigma) = P(-3 < t < 3) = 997\%,$$

$$P(|\varepsilon| > 3\sigma = 3\%.$$

Uvedené pravdepodobnosti platia presne pre základný súbor s normálnym rozdelením a približne pre skutočné rozdelenie chýb. Uvedené intervaly sa volajú **intervaly spoľahlivosti (konfidencie)** (obr.2.5). Príslušná pravdepodobnosť $\Phi(t)$ **koefficient (hladina) spoľahlivosti**. V prípade posunu Gaussovej krivky platí pravdepodobnosť pre redukovanú chybu $\varepsilon - \bar{c}$.



Obr. 2.5. Interval spoľahlivosti $\pm t_\alpha$

Ak si zvolíme dostatočne široký interval $\pm t_\alpha\sigma$, ostáva len malá pravdepodobnosť α (**hladina významnosti, riziko**), že chyba (hodnota náhodnej veličiny) prekročí hranice $\pm t_\alpha\sigma$ (interval spoľahlivosti $E(x) \pm t_\alpha\sigma$). Pri zvolenej veľmi malej pravdepodobnosti α budeme s **praktickou (štatistickou) istotou** očakávať, že náhodná veličina (chyba) bude ležať v medziach príslušného intervalu spoľahlivosti. Inými slovami (**riziko**) α , že náhodná veličina prekročí **kritické hranice** $E(x) \pm t_\alpha\sigma$, je taká malá, že prekročenie kritickej hranice považujeme za **prakticky nemožné**.

Ak v rovnici (2.33) dosadíme za chybu $\varepsilon = X - \ell_i$, dostaneme **interval spoľahlivosti** (konfidenčný interval) pre neznámu skutočnú hodnotu X

$$P\{\ell_i - t_\alpha\sigma < X < \ell_i + t_\alpha\sigma\} = \Phi(t_\alpha). \quad (2.34)$$

Najväčšia prípustná chyba. Chyby nemôžu nadobudnúť neohraničene veľké hodnoty, ako ukazuje priebeh Gaussovej krivky. Hodnota ε_{\max} je **najväčšia možná nevyhnutná chyba**. V praxi sa za najväčšiu prípustnú chybu považuje

$$|\varepsilon_\alpha| = t_\alpha\sigma = 2\sigma \text{ až } 3\sigma, \quad |\varepsilon_\alpha| < \varepsilon_{\max}. \quad (2.35)$$

2.5 Interval spoľahlivosti

Ak poznáme spoľahlivo základnú strednú chybu metódy $\bar{m} = \sigma$, môžeme odvodenú hodnotu $\sigma_x = \sigma\sqrt{Q_{11}}$ použiť k intervalovým odhadom, kde Q_{11} je váhový koeficient. Bude platiť normálne

rozdelenie aj pre štandardnú premennú $t = \frac{\varepsilon_x}{\sigma_x}$

$$t = \varepsilon_x : \sigma_x, \quad P(-t\sigma_x < \varepsilon_x < +t\sigma_x) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.36)$$

Chyba $\varepsilon_x = X - \bar{x}$ udáva možnú odchýlku hodnoty vyrovnanej \bar{x} od skutočnej X , ktorú môžeme vyjadriť inou formou rovnice:

$$P(X - t\sigma_x < \bar{x} < X + t\sigma_x) = \Phi(t) \quad (2.37)$$

takže napr. s $P = 99 \%$ (s praktickou istotou) sa vyrovnaná hodnota \bar{x} nevzdiali viac ako $\pm 2,5\sigma_x$ od skutočnej hodnoty. **Interval spoľahlivosti pre neznámu skutočnú hodnotu X :**

$$P(\bar{x} - t_\alpha \sigma_\alpha < X < \bar{x} + t_\alpha \sigma_\alpha) = \Phi(t_\alpha) = 1 - \alpha, \quad (2.38)$$

kde $\Phi(t_\alpha)$ je pravdepodobnosť pri koeficiente spoľahlivosti t_α , že neznámy parameter X leží v intervale spoľahlivosti a α je riziko chybného rozhodnutia, že interval spoľahlivosti neobsahuje parameter X .

Je prakticky nemožné, aby nevyhnutná chyba ε_x nadobudla príliš veľké hodnoty a odmeraný výsledok x_i a skutočná hodnota X boli veľmi vzdialené. Ak zvolíme veľmi malé riziko α (napr. 1 %) bude s praktickou istotou neznáma skutočná hodnota ležať v intervale napr. $\bar{x} \pm 2,5\sigma_x$. Podmienkou intervalových odhadov je spoľahlivá hodnota základnej strednej chyby $\bar{m} = \sigma$, určená aspoň z $n' > 30$ nadbytočných meraní.

Interval spoľahlivosti je najvýznamnejšia aplikácia počtu pravdepodobnosti v teórii chýb. Meraním síce nikdy nedostaneme skutočnú hodnotu meranej veličiny, ale pre prax to stačí, aby táto neznáma hodnota bola s praktickou istotou pokrytá dostatočne úzkym intervalom. Ako šírka sa dá regulovať podľa významu merania kombináciou presnosti zvolenej metódy σ a počtu nadbytočných meraní.

2.6 Konštrukcia krivky normálneho rozdelenia

Preloženie krivky normálneho rozdelenia histogramom si ukážeme v príklade 2.1.

Príklad 2.1. Štatistické vyhodnotenie rovinnosti dosiek

Vykonalí sme kontrolu 38 fotografických dosiek formátu 13 x 18 cm, ktoré používame pri fotogrametrickom snímkaní. Za rovinné fotogrametrické dosky budeme považovať také, u ktorých nerovinnosť vplyvom centrálnej projekcie nevyvolá väčšiu chybu v radiálnom posune bodu ako 0,01mm.

Grafické znázornenie výsledkov vykonanej kontroly rovinnosti dosiek histogramom empirických triednych početností, je na obr. 2.6. Podľa veľkosti teoretickej maximálnej chyby v snímkových súradniciach, ktorá sa určila podľa zistených odchýlok od rovinnosti. Dosky sme rozdelili do triednych skupín s intervalom $\Delta\varepsilon = 0,01$ mm. Charakteristický tvar dosiek sa vyjadril znamienkom. Dosky s konvexným tvarom sa označili znamienkom mínus, s konkavným tvarom znamienkom plus. Chyby v snímkových súradniciach (ďalej len „chyby“) vyvolané nerovinnosťou dosiek sú náhodné veličiny, ich triedne skupiny sa rozmiestnili na číselnej osi v kladnej aj zápornej časti.

Histogram empirických početností, ako je vidieť z obr. 2.6, je podobný normovanému histogramu binomického rozdelenia. Môžeme ho nahradiť tzv. Gaussovou frekvenčnou krivkou normálneho rozdelenia s obecným analytickým výrazom pre hustotu pravdepodobnosti

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}},$$

pre $\sigma > 0$,

kde x je základný súbor všetkých možných hodnôt náhodnej premennej,

c stredná hodnota náhodnej premennej,

σ stredná kvadratická odchýlka.

Po zavedení normovanej náhodnej premennej $t = \frac{x-c}{\sigma}$, rovnica hustoty pravdepodobnosti nadobudne tvar

$$y = f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Histogram empirických početností vyrovnajme Gaussovou krivkou o rovnakej ploche s parametrom $\sigma = \sqrt{V(x)}$, kde $V(x)$ je variancia. Stredná kvadratická odchýlka štatistického výberu dosiek ($n = 38$), keďže stredná hodnota $E(\varepsilon) = c = -0,45$, nerovná sa nule, je určená

$$\sigma = \sqrt{m^2 - c^2} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n} - c^2} = \sqrt{2,99 - 0,20} = 1,67.$$

Gaussovú vyrovnávaciu krivku sme zostrojili z vynesých teoretických početností R v príslušných triednych skupinách v nasledujúcej tabuľke:

Štatistické vyhodnotenie rovinnosti dosiek

Tabuľka 2.1

| E_s v 0,01 mm | r | t_h | P | $R = n \cdot P$ | $\Delta r = r - R$ | σ_r | χ^2 |
|--------------------|-----|-------|--------|-----------------|--------------------|------------|----------|
| -4,5 | 1 | -2,12 | 0,0170 | 0,65 | +0,35 | 0,80 | } 1,09 |
| -3,5 | 1 | -1,53 | 0,0460 | 1,74 | -0,74 | 1,29 | |
| -2,5 | 2 | -0,93 | 0,1132 | 4,31 | -2,31 | 1,95 | |
| -1,5 | 9 | -0,33 | 0,1945 | 7,39 | -1,61 | 2,44 | 0,35 |
| -0,5 | 14 | +0,27 | 0,2357 | 8,95 | +5,05 | 2,62 | 2,85 |
| +0,5 | 6 | +0,87 | 0,0214 | 7,65 | -1,65 | 2,47 | 0,36 |
| +1,5 | 2 | +1,47 | 0,1214 | 4,62 | -2,62 | 2,01 | } 0,73 |
| +2,5 | 1 | +2,06 | 0,0511 | 1,94 | -0,94 | 1,36 | |
| +3,5 | 1 | +2,66 | 0,0158 | 0,60 | } 1,25 | } 0,86 | |
| +4,5 | 1 | +3,26 | 0,0039 | 0,15 | | | |
| Spolu: | 38 | - | 1 | 38,0 | 0 | | 5,38 |

V tab. 2.1 E_s je stredná hodnota triedneho intervalu,

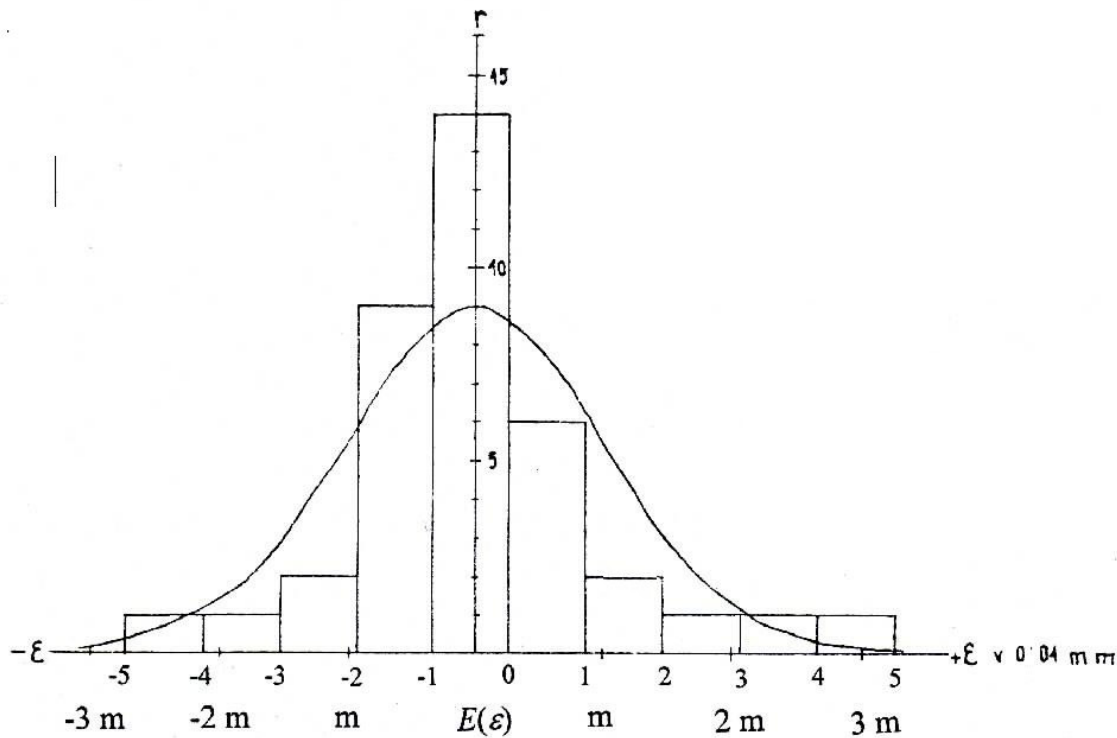
r je početnosť triedneho intervalu,

P je pravdepodobnosť triedneho intervalu.

Teoretické početnosti sa vypočítali pomocou normovanej náhodnej premennej t z tab. II, a to tak, že sa najskôr určili pravdepodobnosti výskytu náhodnej t_j pre hornú medzu triedneho intervalu

$$P(t < t_{hj}) = F(t_{hj}) = 0,5 - G(t_{hj}) = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_{hj}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.39)$$

napr. v príklade 2.1 je $t_{hj} = \frac{-4.0 - c}{\sigma} = \frac{-4.0 - (-0.45)}{1.67} = 2.12$.



Obr. 2.6. Empirické a teoretické (Gaussovo) rozdelenie maximálnych chýb snímkových súradníc, vyvolaných nerovinnosťou dosiek

Pravdepodobnosť určíme z tab. II normálneho rozdelenia ako doplnok k 0.5 tabuľkovej hodnoty $G(t_{hj})$ t.j. $P = 0.5 - G(t_{hj} = 2.12) = 0.5 - 0.4830 = 0.0170$.

Pravdepodobnosť $P(G(t_{hj+1}) - G(t_{hj})) = P((-3.0 + 0.45), (-4.0 + 0.45)) = P(1.53 - 2.12) = 0.0630 - 0.0170 = 0.046$, atď.

Teoretickú početnosť náhodných chýb pre veľkosť štatistického súboru $n = 38$ potom vyjadruje rovnica:

$$R_j = n[G(t_{hj+1}) - G(t_{hj})] = n P_j \quad (2.40)$$

Napr. pre $E_{s+1} = -3,5$ a $E_s = -4,5$ je $h = 38 \cdot 0,046 = 1,74$.

Krivku normálneho rozdelenia skonštruujeme tak, že v príslušnej mierke zvolenej pravdepodobnosti P_i (početnosti r_i) pre stredný interval E_s vynesieme teoretické početnosti R_i .

2.7 Porovnanie histogramu empirických početností s Gaussovou krivkou

Analytické kontroly primknutia empirického histogramu ku Gaussovej krivke. skúšky normality môžeme vykonať pomocou empirických momentov a triednych početností. Kontrolami sa overí, či

chyby výberu dosiek dobre charakterizujú chyby základného súboru. Skúšky normality prevedme podľa BÖHMA [2].

2.7.1 Skúšky normality pomocou empirických momentov

Centrálным empirickým momentom súboru o konečnej veľkosti rozumieme koncentráciu chýb normálneho rozdelenia okolo strednej hodnoty

$$\nu_k = E(\varepsilon^k),$$

kde ν_k je empirická hodnota k -tého obecného momentu.

Empirickými momentami vykonáme skúšky nulovej hypotézy, asymetrie rozdelenia a kritéria excesu rozdelenia.

Skúškou nulovej hypotézy v príklade 2.1 overíme či chyby výberu dosiek nie sú zaťažené systematickou chybou. Skúška sa vykonala s použitím rovnice:

$$\nu_1 \pm \mu_1 = 0 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.41)$$

kde μ_1 je centrálny moment k -tého rádu ($k = 1$).

$$\text{V skúšanom výbere } E(\varepsilon) = \nu_1 = c = -0,45, \quad \mu_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,67}{\sqrt{38}} = 0,27.$$

Hodnota $|\nu_1|$ prekračuje vymedzený interval μ_1 , usudzujeme na možnosť pôsobenia systematickej chyby. Presvečme sa tiež aj **skúškou znamienok**, či je výber dosiek zaťažený systematickou chybou. Podľa kritéria

$$R = |2k - n| > 2\sqrt{n} = 16 > 12,3, \quad (2.42)$$

kde $k = 11$ je počet dosiek s kladnými chybami a $n = 38$. Pri 5 %-nom riziku chybného rozhodnutia vidíme, že je vyvrátená hypotéza o nezaťažení výberu dosiek systematickou chybou.

Skúškou asymetrie rozdelenia si overíme na homogenitu výberu dosiek. Vykonala sa podľa rovnice:

$$|\nu_3| : \mu_3 = t, \quad (2.43)$$

$$\text{kde } \nu_3 = E(x - c)^3 \text{ a } \mu_3 \approx \sigma^3 \sqrt{\frac{6}{n+5}} \approx 1,67^3 \sqrt{\frac{6}{38+5}} = 4,657 \cdot 0,374 = 1,74.$$

Vo výbere dosiek je $\nu_3 = -1,06$ (obecný moment), $\mu_3 = 1,74$ (centrálny moment), $t = 0,61$. Pri $t < 1$ považujeme rozdelenie chýb vo výbere dosiek za symetrické.

Tvar histogramu empirických početností prekontrolujeme podľa **kritéria excesu rozdelenia**

$$\tau_2 = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (2.44)$$

Keď bude $\tau_2 > 0$, histogram empirických početností je špicatý, $\tau_2 < 0$ plochý, $\tau_2 = 0$ zhodný s Gaussovou krivkou.

$$\text{V skúšanom výbere dosiek } \tau_2 = \frac{34,06}{7,76} - 3 = +1,39 > 0. \text{ Histogram početností je špicatý.}$$

Skúšky normality pomocou empirických momentov preukázali, že výber dosiek má systematickú chybu (konvexné dosky), histogram empirických početností je symetrický a má exces. Významnosť excesu, t.j. či náhodný výber ešte patrí do základného súboru, môžeme overiť strednou kvadratickou odchýlkou σ_r triednych početností a Pearsonovým kritériom dobrej zhody.

2.7.2 Skúška normality pomocou triednych početností

Porovnanie histogramu empirických početností s Gaussovou krivkou v príklade 2.1 (obr. 2.6) ukazuje, akou mierou sa triedne početnosti približujú k normálnemu rozdeleniu.

Stredné kvadratické odchýlky empirických triednych početností od normálnych početností pre skúmaný štatistický výber dosiek (uvedené sú v tab. 2.1), sme vypočítali zo vzťahu:

$$\sigma_{r,j} = \sqrt{n P_j (1 - P_j)}, \quad (2.45)$$

napr. $\sigma_r = \sqrt{38 \cdot 0,017 (1 - 0,017)} = 0,80$.

Podľa porovnania odchýlok $\sigma_{r,j}$ s rozdielmi empirických a normálnych početností Δr_j v tab. 2.1 považujeme zhodu výberu s normálnym základným súborom za uspokojujúcu, pretože rozdiely Δr_j nepresiahli dvojnásobok odchýlok $\sigma_{r,j}$.

Pre výpočet Pearsonovho kritéria dobrej zhody sme okrajové triedy upravili tak, že ich početnosti boli 4 a 5. Potom veličina

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^5 \frac{(r_j - R_j)^2}{R_j} = 5,38, \quad (2.46)$$

$j = 5$ je počet upravených triednych skupín, n' sú nadbytočné prvky (stupne voľnosti).

Kritérium χ_α^2 podľa tab. VII pre $j - k = 5 - 3 = 2$ stupne voľnosti a riziko $\alpha = 0,05$ je 5,99. Tri stupne voľnosti sme použili na utvorenie spoločných súčtov, strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky. Platí teda $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. Podľa výsledku skúšky Pearsonovho kritéria dobrej zhody pri riziku $\alpha = 0,05$ konštatujeme, že empirické rozdelenie neodporuje hypotéze normality. Skúmaný štatistický výber môžeme považovať za vzorku vybranú zo základného súboru s Gaussovým rozdelením.

Podľa rozdelenia pravdepodobnosti empirickej strednej chyby platí o jej strednej hodnote:

$$E(m) = K \bar{m}, \quad (2.47)$$

kde K je zmenšujúci faktor o hodnote 0,80 až 1,0. Keď pri súbore o veľkosti $n = 25$ je $K = 0,99$ v našom prípade pri $n = 38$ položíme $m \approx \bar{m}$.

Intervalový odhad možného výskytu chýb v snímkových súradniciach pri používaní dosiek firmy ORWO, je potom vyjadrený pravdepodobnosťou pre $\sigma = 1,67$

$$P(-3\sigma < \varepsilon < 3\sigma) = P(-0,05 \text{ mm} < \varepsilon < 0,05 \text{ mm}). \quad (2.48)$$

Príklad 2.2. Pravdepodobnosť výberu rovinatej dosky (z príkladu 2.1).

Pravdepodobnosť, že zo základného súboru dosiek vyberieme rovinnú dosku, vyjadruje interval spoľahlivosti pre neznámu pravdepodobnosť

$$P(p_d < p < p_n) = P\{0,36 < p < 0,69\}$$

Interval spoľahlivosti bol určený z tab. XIX. [3] pre skúmaný výber $n = 38$, v ktorom priaznivé prípady (rovinné dosky) $p_0 = 20$, nepriaznivé prípady $q_0 = 18$.

Najpriaznivejšiu hodnotu pravdepodobnosti p_n vyjadruje súčet pravdepodobnosti P_j v intervale $(-0,01, 0,01)$ v tab. 2.1, kde je splnená podmienka rovinnosti dosiek: $p_n = 0,44$.

Pravdepodobnosť, že nevyberieme zo vzorky o veľkosti n ani jednu rovinnú dosku, podľa binomického rozdelenia je určená:

$$\binom{n}{0} p_0^0 q_0^n = q_0^n \quad (2.49)$$

Pravdepodobnosť opačného javu, že aspoň jedna doska bude rovinná, vyjadruje rovnica:

$$P = 1 - q_0^n, \text{ z toho dostaneme}$$

$$q_0^n = 1 - P = \alpha, \quad (2.50)$$

kde α je hladina významnosti rozhodnutia.

Z upravenej rovnice (2.50), vypočítame veľkosť vzorky n

$$n = \frac{\log \alpha}{\log(1 - P)}. \quad (2.51)$$

Vypočítané veľkosti vzorky pri 95 % a 99 % spoľahlivosti pre medzné hodnoty intervalového odhadu pravdepodobnosti, najpriaznivejšiu hodnotu pravdepodobnosti $p_n = (0,19 + 0,24 + 0,02)$ a pre empirickú hodnotu pravdepodobnosti $\left(p_e = \frac{20}{38} = 0,53\right)$ sú uvedené v tab. 2.2.

Objem vzorky pre výber rovinných dosiek

Tabuľka 2.2

| $\alpha = 0,05$ | | $\alpha = 0,01$ | |
|-----------------|---------------------|-----------------|-----------------------|
| $p_d = 0,36$ | $n = 6,7 \approx 7$ | $p_d = 0,31$ | $n = 11,2 \approx 12$ |
| $p_h = 0,69$ | $2,6 \approx 3$ | $p_h = 0,73$ | $3,5 \approx 4$ |
| $p_n = 0,45$ | $5,2 \approx 5$ | $p_n = 0,45$ | $7,9 \approx 8$ |
| $p_e = 0,53$ | $4,0 \approx 4$ | $p_e = 0,53$ | $6,1 \approx 6$ |

Pri pravdepodobnosti $p_e = 0,53$ podľa tab. 2.2 a 95 % spoľahlivosti dosiahneme, že medzi štyrmi ľubovoľne vybranými doskami najmenej jedna bude rovinná.