

6. STREDNÉ CHYBY

6.1 Stredné chyby sprostredkujúcich meraní

a) Jednotková stredná chyba

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - k}}, \text{ kde } (n - k) \text{ je počet nadbytočných meraní.}$$

b) Stredné chyby neznámych (Hansenovo riešenie).

Vektor neznámych je vyjadrený

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{A}_x \mathbf{l}, \quad (6.1)$$

na výpočet matice váhových koeficientov môžeme použiť zákon hromadenia váh

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{A}_x \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_x^T, \text{ kde } \mathbf{A}_x = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= (-\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{P}^{-1} (-\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})^T, & \mathbf{P}^T &= \mathbf{P}; (\mathbf{N}^{-1})^T = \mathbf{N}^{-1}, \\ &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1}, & \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{E} \text{ (jednotková matica)}, \\ &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1}, & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} &= \mathbf{N}, \\ &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1}, & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} &= \mathbf{E}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1}. \quad (6.2)$$

Touto úpravou sme sa dostali k veľmi dôležitej a zaujímavej okolnosti a to, že matica váhových koeficientov je totožná s inverznou maticou koeficientov normálnych rovníc. Táto vlastnosť je málo známa a jej odhalenie je neľahké pri riešení normálnych rovníc Gaussovým algoritmom.

Pri výpočte prvkov matice váhových koeficientov \mathbf{Q}_x vychádzame z rovnice $\mathbf{Q}_x \mathbf{N} = \mathbf{E}$, ktorú pre názornosť rozpíšeme

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum paa & \sum pab & \sum pac \\ \sum pab & \sum pbb & \sum pbc \\ \sum pac & \sum pbc & \sum pcc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Váhové koeficienty jednotlivých neznámych ležia v matici \mathbf{Q}_x na hlavnej uhlopriečke a budú

$$\begin{aligned} m_x &= m_0 \sqrt{Q_{xx}}, \\ m_y &= m_0 \sqrt{Q_{yy}}, \\ m_z &= m_0 \sqrt{Q_{zz}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

c) Stredné chyby funkcií vyrovnaných neznámych.

Majme funkciu vyrovnaných neznámych

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) = f_x dx + f_y dy + f_z dz, \quad (6.5)$$

ktorá má v maticovom zápise tvar

$$F = F_0 + \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad \text{kde } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (6.6)$$

Za \mathbf{x} dosadíme hodnotu rovnice (6.1) a s prihliadnutím k platnosti rovnice (6.2) dostaneme

$$F = F_0 - \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = F_0 - \mathbf{A}_F \mathbf{l} \quad (6.7)$$

Na túto rovnicu aplikujeme zákon hromadenia váh v tvare rovnice $Q_{FF} = \mathbf{A}_F \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_F^T$, ktorá bude

Úpravy rovnice:

$$\begin{aligned} Q_{FF} &= (-\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{P}^{-1} (-\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P})^T, & \mathbf{P}^T &= \mathbf{P}; \quad \mathbf{Q}_x^T = \mathbf{Q}_x; \\ &= \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{f}, & \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{E}; \\ &= \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{f}, & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} &= \mathbf{N}; \\ &= \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{N} \mathbf{Q}_x \mathbf{f}, & \mathbf{Q}_x \mathbf{N} &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{E}; \\ Q_{FF} &= \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{f}, \text{ je kvadratická forma – skalár.} \end{aligned} \quad (6.8)$$

V klasickom odvodzovaní má táto rovnica tvar

$$Q_{FF} = f_x^2 Q_{xx} + 2f_x f_y Q_{xy} + 2f_x f_z Q_{xz} + f_y^2 Q_{yy} + 2f_y f_z Q_{yz} + f_z^2 Q_{zz}. \quad (6.9)$$

V rovnici (6.8) označíme $\mathbf{Q}_x \mathbf{f} = \mathbf{r}$, zavedieme vektor pomocných neznámych

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad \text{potom bude } Q_{FF} = \mathbf{f}^T \mathbf{r},$$

kde sa vektor \mathbf{r} počíta zo systému rovníc, ktoré sú tvarom podobné normálnym rovniciam len so zámienou neznámych a absolútnych členov.

Rovnicu	$\mathbf{Q}_x \mathbf{f} = \mathbf{r}$	vynásobíme zľava	$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ a dostaneme
	$\mathbf{N} \mathbf{Q}_x \mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{r},$	a pretože	$\mathbf{N} \mathbf{Q}_x = \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{E}$ dostaneme
	$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{r}$	a teda	
	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{r} - \mathbf{f} = 0.$		(6.10)

Porovnaním tejto rovnice s tvarom normálnych rovníc $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{l} = 0$, vidíme podobnú formu so zámienou neznámych \mathbf{x} za pomocné neznáme \mathbf{r} a absolútnych členov $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{l}$ za absolútne členy $-\mathbf{f}$.

6.2 Stredné chyby podmienkových meraní

a) Jednotková stredná chyba

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}}, \quad r = \text{počet nadbytočných meraní.} \quad (6.11)$$

b) Stredná chyba funkcie vyrovnaných meraní

Majme funkciu vyrovnaných meraní $F(L_i + v_i)$ pre $i = 1, 2, \dots, n$, merané hodnoty rozložíme na $L_i = L_{0,i} + \ell_i$ a funkciu budeme linearizovať

$$F(L_1 + v_1, L_2 + v_2, \dots, L_n + v_n) = F(L_{0,1}, L_{0,2}, \dots, L_{0,n}) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial(L_1 + v_1)}(\ell_1 + v_1) + \frac{\partial F}{\partial(L_2 + v_2)}(\ell_2 + v_2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial(L_n + v_n)}(\ell_n + v_n). \quad (6.12)$$

Označíme $F_0 = F(L_{0,1}, L_{0,2}, \dots, L_{0,n})$, $f_i = \frac{\partial F}{\partial(L_i + v_i)}$ a zavedieme vektor parciálnych derivácií

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Funkcia vyrovnaných meraní $L(L_i + v_i)$ bude mať v maticovom zápise tvar

$$F = F_0 + \mathbf{f}^T \mathbf{l} + \mathbf{f}^T \mathbf{v}. \quad (6.14)$$

Do tejto rovnice budeme postupne dosadzovať za $\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k}$, ďalej za $\mathbf{k} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$ z rovnice $\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$ a za $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{l}$ a bude

$$F = F_0 + \mathbf{f}^T \ell - \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{l}),$$

kde člen s \mathbf{u}_0 pripojíme k F_0 a označíme $F_{00} = F_0 - \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}_0$

$$F = F_{00} + \mathbf{f}^T \mathbf{l} - \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (6.15)$$

Pre ďalšiu úpravu zavedieme vektor pomocných koeficientov $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{pmatrix}$,

(v našom zvolenom obmedzení pre $r = 3$) tak, aby platilo

$$\mathbf{N} \mathbf{g} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f} = 0. \quad (6.16)$$

Klasický rozpísaný tvar tejto rovnice je

$$\sum qaa g_a + \sum qab g_b + \sum qac g_c + \sum qaf = 0,$$

$$\sum qab g_a + \sum qbb g_b + \sum qbc g_c + \sum qbf = 0,$$

$$\sum qac g_a + \sum qbc g_b + \sum qcc g_c + \sum qcf = 0.$$

Rovnicu (6.16) vynásobíme zľava hodnotou \mathbf{N}^{-1} a vektor pomocných koeficientov bude

$$\mathbf{g} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}, \text{ alebo } \mathbf{g}^T = -\mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1}. \quad (6.17)$$

Odvođený vzťah pre \mathbf{g}^T použijeme pre úpravu rovnice (6.15)

$$F = F_{00} + \mathbf{f}^T \mathbf{l} + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} = F_{00} + (\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{l}. \quad (6.18)$$

Na takto vyjadrenú funkciu použijeme zákon hromadenia váh v tvare $Q_{FF} = \mathbf{A}_F \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_F^T$

$$\begin{aligned} Q_{FF} &= (\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{A} \mathbf{g}) = \\ &= \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Na úpravu tejto rovnice vynásobíme rovnicu (6.16) zľava hodnotou \mathbf{g}^T , takže bude

$$\mathbf{g}^T \mathbf{N} \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}, \quad (6.19)$$

kde ďalej použijeme $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}$ a výsledný tvar pre Q_{FF} bude

$$Q_{FF} = \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (6.20)$$

v klasickom vyjadrení $Q_{FF} = \sum qff + \sum qaf g_a + \sum qbf g_b + \sum qcf g_c$.

Pomocou Q_{FF} vyjadríme strednú chybu funkcie vyrovnaných veličín

$$m_F = m_0 \sqrt{Q_{FF}}. \quad (6.21)$$