

## 1. BINOMICKÉ ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI

Ilustráciou vzniku normálneho rozdelenia je binomické rozdelenie. Binomické rozdelenie vzniká pri opakovaných pokusoch, pričom ide o jav alternatívny (buď nastane alebo nenastane). V nádobe máme bielu a čiernu guľičku. Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej guľičky (jav  $A$ ) označíme  $p = 1/2$ , pravdepodobnosť vytiahnutia čiernej guľičky (jav  $B$  = jav  $A$ ) označíme  $q = 1/2$ , platí teda  $p + q = 1$ . Urobíme  $s$  ťahov za sebou, pričom guľičku vždy po ťahu vložíme späť a znova zamiešame. Pravdepodobnosti  $p$ ,  $q$  sú pri pokusoch konštantné a výsledky pokusov sú vzájomne nezávislé. Môžeme dostať tieto  $(s + 1)$  rôzne výsledky: biela guľička ( $A$ ) sa objaví 0, 1, 2, ...,  $s$ -krát. Pravdepodobnosti všetkých možných výsledkov série  $s$  pokusov zostavíme do prehľadnej tabuľky, kde náhodnou veličinou  $x$  bude počet javov  $A$ .

Počet pokusov	Možné variácie	Výskyt javu A	Pravdepodobnosť variácie
1	$A$	1	$p$
	$B$	0	$q$
2	$AA$	2	$p^2$
	$AB$	1	$pq$
	$BA$	1	$pq$
	$BB$	0	$q^2$
3	$AAA$	3	$p^3$
	$AAB$	2	$p^2 q$
	$ABA$	2	$p^2 q$
	$BAA$	2	$p^2 q$
	$ABB$	1	$pq^2$
	$BAB$	1	$pq^2$
	$BBA$	1	$pq^2$
	$BBB$	0	$q^3$

Pri jednom pokuse máme  $2^1 = 2$  možné výsledky. Majú pravdepodobnosť  $P_A = p$ ,  $P_B = q$  a ich súčet  $\sum P = p + q = 1$ .

Pri dvoch pokusoch máme  $2^2 = 4$  možné variácie vytiahnutia guľičiek. Nakoniec nezáleží na poradí vytiahnutých guľičiek, ale na počte bielych.

$$P_{AA} = p^2, P_{AB} = 2pq, P_{BB} = q^2,$$

$$x = 2, \quad x = 1, \quad x = 0$$

a ich súčet

$$\sum P = p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1.$$

Pri 3 pokusoch vzniká  $2^3 = 8$  variácií

$$P_{AAA} = p^3, \quad P_{AAB} = 3p^2q, \quad P_{ABB} = 3pq^2, \quad P_{BBB} = q^3,$$

$$x = 3, \quad x = 2, \quad x = 1, \quad x = 0,$$

ich súčet je

$$\begin{aligned} \sum P &= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{8} + 3\frac{1}{8} + 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1. \end{aligned}$$

Každý člen radu udáva pravdepodobnosť pre ten počet javov  $A$ , koľko udáva mocniteľ u jeho pravdepodobnosti  $p$ . Všeobecne pre  $s$  pokusov dostaneme **binomický rad**.

$$(p+q)^s = \binom{s}{0}p^0q^s + \binom{s}{1}p^1q^{s-1} + \binom{s}{2}p^2q^{s-2} + \dots + \binom{s}{s-1}p^{s-1}q^1 + \binom{s}{s}p^sq^0 = 1, \quad (1.1)$$

$$= q^s + spq^{s-1} + \binom{s}{2}p^2q^{s-2} + \dots + sp^{s-1}q + p^s = 1, \quad (1.2)$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{s-1} + P_s = 1.$$

Všeobecný člen binomického radu má tvar

$$P(x=k) = \binom{s}{k}p^kq^{s-k} = \frac{s!}{k!(s-k)!}p^kq^{s-k}, \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo}, \quad (1.3)$$

udáva pravdepodobnosť pre hodnotu  $k$  náhodnej veličiny, že v sérii  $s$  pokusov sa jav  $A$  objaví  $k$ -krát.

Rad (1.2) dáva **binomické rozdelenie pravdepodobností pre náhodnú veličinu  $x$** , t.j. udáva pravdepodobnosť výskytu pre každú jej možnú hodnotu. V rovnici (1.3) je súčin  $p^kq^{s-k}$  elementárnou pravdepodobnosťou jednej variácie  $s$  početnosťou  $k$  javu a  $\binom{s}{k}$  je počet

variácií, ktorými sa početnosť  $k$  uskutočňuje. Zoradené koeficienty  $\binom{s}{k}$  radu (1.2) dávajú

pre rôzne  $s$  známy symetrický **Pascalov trojuholník**, ich súčet  $N = (1+1)^s = 2^s$  je počtom možných výsledkov v sérii  $s$  ťahov.

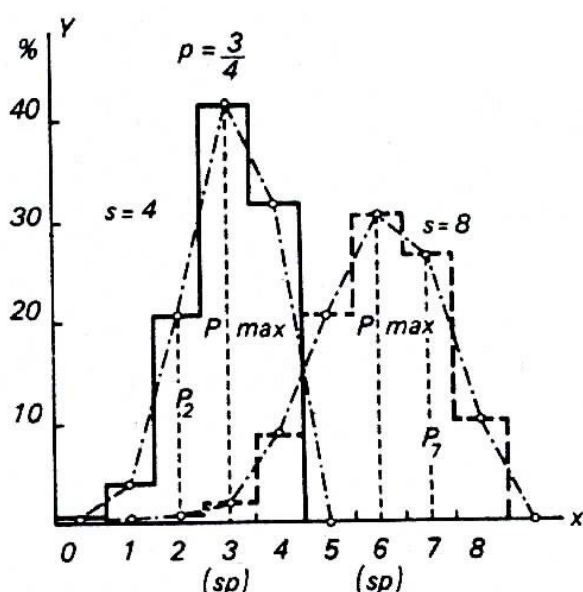
Koeficienty $\binom{s}{k}$	$s$	$N = 2^s$	$100\% \binom{s}{k} : 2^s$
1	0	1	100
1-1	1	2	50-50
1-2-1	2	4	25-50-25
1-3-3-1	3	8	12-38-38-12
1-4-6-4-1	4	16	6--25-38-25-6
1-5-10-10-5-1	5	32	3-16-31-61-16-3
1-6-15-20-15-6-1	6	64	2-9-23-31-23-9-2

Každému počtu  $s$  opakovaných pokusov a určitým pravdepodobnostiam  $p$  a  $q$  prislúcha samostatný základný súbor všetkých možných výsledkov s určitým charakteristickým rozdelením pravdepodobností.

**Príklad 1:** V nádobe máme biele a čierne guľičky v pomere 3:1. Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej guľičky (jav  $A$ ) je preto  $p = 3/4$  a vytiahnutie čiernej (jav  $\text{non } A$ )  $q = 1/4$ . Pre sériu 4-och pokusov môžeme dostať jeden z 5-ich rôznych možných výsledkov, každý má inú pravdepodobnosť  $P(x)$ , ktorú určíme podľa rovnice (1.2):

Počet bielych guľičiek v sérii štyroch pokusov $x =$	0	1	2	3	4	$\Sigma$
$(p+q)^4$	$q^4$	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	$p^4$	1
Pravdepodobnosť $P(x)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{256}{256}$
$P(x)$ v %	0,4	4,7	21	42	32	100

Príklad 1 nám charakterizuje **nesymetrické rozdelenie pravdepodobnosti** ak  $p \neq q$  (obr. 1.1).



Obr.1.1. Binomické rozdelenie pravdepodobnosti (nesymetrická pravdepodobnosť) pri  $p = \frac{3}{4}$

**Súbory so symetrickými pravdepodobnosťami.** Zvláštny a veľmi dôležitý je prípad, keď pravdepodobnosti  $p = q = 1/2$  (obr.1.2). Pokusy s rovnakým množstvom bielych a čiernych guľičiek, pre hody mincami, pre hody kockami (párne číslo - nepárne číslo), sa vyskytnú aj v teórii meračských chýb.

V tomto prípade sa binomický rad (1.2) zjednoduší, pretože súčiny  $p^k q^{s-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{s-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^s$  sú konštantné

$$(p+q)^s = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{2^s} \left[ 1 + s + \binom{s}{2} + \dots + \binom{s}{s-2} + s + 1 \right] = \quad (1.4)$$

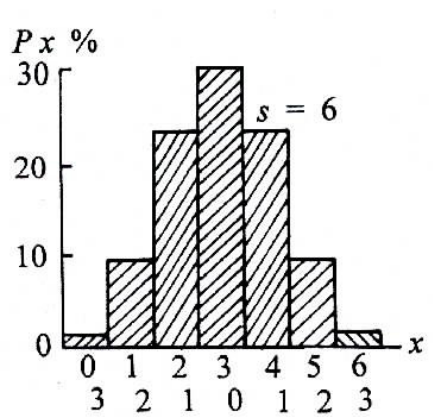
$$= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{s-2} + P_{s-1} + P_s = 1. \quad (1.5)$$

Pravdepodobnosť, že sa vo výsledku série  $s$  opakovaných ťahov  $k$ -krát objaví jav  $A\left(p = \frac{1}{2}\right)$ , je daná členom

$$P(x=k) = \frac{1}{2^s} \binom{s}{k}. \quad (1.6)$$

Koeficienty  $\binom{s}{k}$  sú zostavené v Pascalovom trojuholníku na str. 4 a vedľa neho sú aj pravdepodobnosti  $P(k)$  vyjadrené v percentách. Stredná hodnota pre  $p = \frac{1}{2}$  je

$$E(x) = \sum_{i=1}^s x_i P(x_i) = sp = \frac{1}{2} s.$$



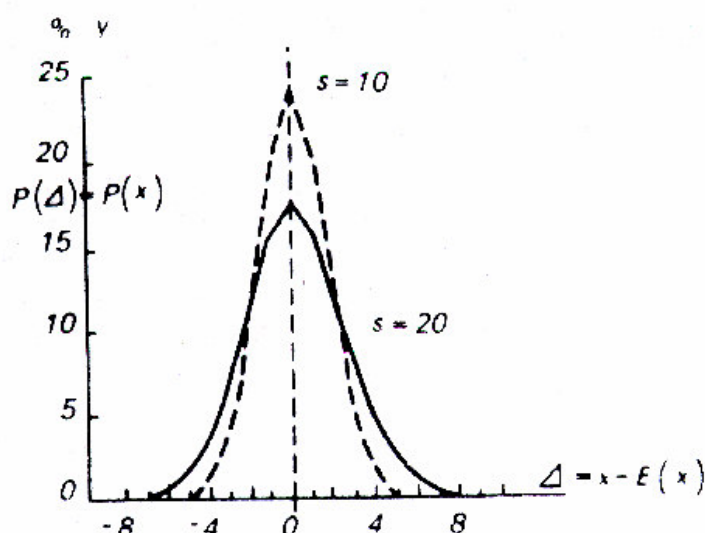
Obr. 1.2. Symetrické binomické rozdelenie pravdepodobností  $p = \frac{1}{2}$

**Príklad 2:** Hádzeme naraz 6 mincami. S akou pravdepodobnosťou môžeme čakať určitú početnosť  $x$  štátnych znakov? Tu  $s = 6$ ,  $p = 1/2$  a použijeme koeficienty v Pascalovom trojuholníku:

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{64}{64}$
$P(x) \text{ v } \%$	1,6	9,4	23,4	31,2	23,4	9,4	1,6	100

S rastúcim počtom  $s$  pokusov dostáva histogram stále zreteľnejší tvar hladkej zvonovitej krivky.

Takto dostaneme pre  $s \rightarrow \infty$  spojitú zvonovitú krivku, krivku Gaussovu. Obidve jej vetvy sa blížia asymptoticky k osi  $X$ , plocha vymedzená krivkou a osou  $X$  je však konečná a je 100 % = 1. Tento limitný prípad vedie k -tzv. „normálnemu rozdeleniu“ pravdepodobností.



Obr. 1.3. Gaussova krivka

### Variancia náhodnej veličiny

Jednotlivý pokus  $s = 1$  môže mať výsledok  $x_1 = 1$  s pravdepodobnosťou  $P(x = x_1) = p_1 = p$ , alebo  $x_2 = 0$  s pravdepodobnosťou  $P(x = x_2) = p_2 = q$ . Tie isté pravdepodobnosti budú mať i odchýlky výsledkov od strednej hodnoty  $E(x) = sp = p$ , ako i štvorce týchto odchýlok. Stredná hodnota štvorca odchýlky pre jednotlivý pokus je

$$\begin{aligned} E(\Delta^2) &= E\{x - E(x)\}^2 = E(x - p)^2 = p_1(x_1 - p)^2 + p_2(x_2 - p)^2 = \\ &= p\left(\underbrace{1 - p}_q\right)^2 + qp^2 = pq^2 + qp^2 = pq\left(\underbrace{q + p}_1\right) = pq. \end{aligned}$$

Pre  $s$  pokusov bude variancia súčtom variancií z jednotlivých pokusov ( $V(x + y + z + \dots) = V(x) + V(y) + V(z) + \dots$ )

$$V(x) = \sigma^2 = E\{x - E(x)\}^2 = E(\Delta)^2 = spq \quad (1.7)$$

a smerodajná odchýlka

$$\sigma = \sqrt{spq}.$$

V prípade symetrického rozdelenia  $p = q = 1/2$ .

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{s}{4}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\sqrt{s}. \quad (1.8)$$