

#### 4. ZÁKON HROMADENIA STREDNÝCH CHÝB A ZÁKON HROMADENIA VÁH

Máme funkciu  $F(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  meraných nezávislých hodnôt  $\ell_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ktorých stredné chyby poznáme.

Funkciu  $F$  zapíšeme v lineárnom tvare

$$F = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_n \ell_n, \quad (4.1)$$

kde  $\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial \ell_i}$ .

Rovnicu (4.1) zapíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_{(1,n)}^T \mathbf{l}_{(n,1)}, \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{a}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  je vektor parciálnych derivácií a  $\mathbf{l}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$  je vektor merania.

Za predpokladu, že:

- a) hodnoty  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  sú nezávislé,
- b) existuje totálny diferenciál funkcie  $F(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ ,
- c) chyby merania sú náhodné, môžeme formulovať tzv. **zákon hromadenia stredných chýb**, ktorý vyjadruje strednú chybu funkcie  $F(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  ako funkciu stredných chýb merania

$$m_F^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \dots + \alpha_n^2 m_n^2, \quad (4.3)$$

kde  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sú stredné chyby meraných hodnôt.

Niekedy býva pri odvodzovaní vzorcov výhodnejšie pracovať len s váhami, resp. recipročnými hodnotami váh namiesto stredných chýb. Ak uvážime, že platia vzťahy

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}, \quad m_i^2 = \frac{m_0^2}{p_i} = q_i m_0^2, \quad m_F^2 = \frac{m_0^2}{p_F} = q_F m_0^2, \quad (4.4)$$

dostaneme vzťah medzi váhami, ako tzv. zákon hromadenia váh

$$q_f = q_1 \alpha_1^2 + q_2 \alpha_2^2 + \dots + q_n \alpha_n^2. \quad (4.5)$$

Pre maticový zápis zavedieme vektory ako pri rovnici (4.2) a tiež

$$\text{maticu variancií } \mathbf{M}_{(n,n)}^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{pmatrix},$$

inverznú váhovú maticu

$$\mathbf{Q}_{(n,n)} = \mathbf{P}_{(n,n)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Zákon hromadenia stredných chýb môžeme zapísať

$$m_{F(1,1)}^2 = \mathbf{a}_{(1,n)}^T \mathbf{M}_{(n,n)}^2 \mathbf{a}_{(n,1)} \quad (4.6)$$

a zákon hromadenia váh v tvare

$$q_{F(1,1)} = \frac{1}{p_F} = \mathbf{a}_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{(n,n)}^{-1} \mathbf{a}_{(n,1)} . \quad (4.7)$$

Majme viac daných funkcií, ktoré po ich linearizácii vyjadríme vzťahmi

$$\begin{aligned} F_\alpha &= F_{0\alpha} + \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_n \ell_n, \quad \text{kde } \alpha_i = \frac{\partial F_\alpha}{\partial \ell_i}, \\ F_\beta &= F_{0\beta} + \beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \dots + \beta_n \ell_n, \quad \text{kde } \beta_i = \frac{\partial F_\beta}{\partial \ell_i}, \\ F_\gamma &= F_{0\gamma} + \gamma_1 \ell_1 + \gamma_2 \ell_2 + \dots + \gamma_n \ell_n, \quad \text{kde } \gamma_i = \frac{\partial F_\gamma}{\partial \ell_i}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ako príklad si uveďme vyrovnanie súradníc bodu pretínaním napred súčasne určenými smerníkmi a dĺžkami

$$\begin{aligned} F_\sigma &= \sigma_i = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i}, \\ F_s &= S_i = \sqrt{(y - y_i)^2 + (x - x_i)^2}. \end{aligned}$$

Po linearizácii

$$\begin{aligned} F_{0\sigma} &= \varphi_i = \arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial F_\sigma}{\partial y_0}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_0}, \\ F_{0s} &= s_{i0} = \sqrt{(y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2}, \quad \beta_1 = \frac{\partial F_s}{\partial y_0}, \quad \beta_2 = \frac{\partial F_s}{\partial x_0}, \quad \ell_1 = dy, \quad \ell_2 = dx. \end{aligned}$$

Pre maticové vyjadrenie rovníc (4.8) zavedieme

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \\ F_\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} F_{0\alpha} \\ F_{0\beta} \\ F_{0\gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

a systém rovníc (4.8) môžeme zapísať

$$\mathbf{f}_{(3,1)} = \mathbf{f}_{0(3,1)} + \mathbf{A}_{(3,n)} \mathbf{l}_{(n,1)}. \quad (4.9)$$

Ak aplikujeme na tento výraz zákon hromadenia stredných chýb, bude výsledný maticový tvar

$$\mathbf{S}_{F(3,3)} = \mathbf{A}_{(3,n)} \mathbf{M}_{(n,n)}^2 \mathbf{A}_{(n,3)}^T \quad (4.10)$$

a zákon hromadenia váh

$$\mathbf{Q}_{F(3,3)} = \mathbf{A}_{(3,n)} \mathbf{P}_{(n,n)}^{-1} \mathbf{A}_{(n,3)}^T . \quad (4.11)$$

Matice, ktoré boli použité v posledných dvoch vzorcoch sú veľmi dôležité a majú základný význam pre vyhodnotenie výsledkov vyrovnania alebo výpočtov. Je to rozptylová matica (prvky  $m_{F\alpha}^2, m_{F\beta}^2, m_{F\gamma}^2$  na hlavnej uhlopriečke sú variácie funkcií  $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$  a prvky typu  $m_{F\alpha F\beta}$  mimo hlavnej uhlopriečky sú tzv. kovariancie)

$$\mathbf{S}_{F(3,3)} = \begin{pmatrix} m_{F\alpha}^2 & m_{F\alpha F\beta} & m_{F\alpha F\gamma} \\ m_{F\alpha F\beta} & m_{F\beta}^2 & m_{F\beta F\gamma} \\ m_{F\alpha F\gamma} & m_{F\beta F\gamma} & m_{F\gamma}^2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

a tzv. matice kofaktorov alebo tiež matice váhových koeficientov

$$\mathbf{Q}_{F(3,3)} = \begin{pmatrix} Q_{F\alpha F\alpha} & Q_{F\alpha F\beta} & Q_{F\alpha F\gamma} \\ Q_{F\alpha F\beta} & Q_{F\beta F\beta} & Q_{F\beta F\gamma} \\ Q_{F\alpha F\gamma} & Q_{F\beta F\gamma} & Q_{F\gamma F\gamma} \end{pmatrix} . \quad (4.13)$$

Pre prvky matíc (4.12) a (4.13) podľa rovníc (4.4) platia vzťahy

$$m_{F\alpha}^2 = m_0^2 Q_{F\alpha F\alpha} \quad \text{a} \quad m_{F\alpha F\beta} = m_0^2 Q_{F\alpha F\beta} . \quad (4.14)$$

Keď je funkcia vyjadrená ako vektor koeficientov krát vektor merania (4.1), potom sa použijú rovnice (4.6) alebo (4.7) a výsledkom je skalár (variancia funkcie alebo recipročná váha funkcie), alebo je systém funkcií vyjadrený ako matica koeficientov krát vektor merania, použije sa rovnica (4.10) alebo (4.11) a výsledkom je rozptylová matica  $\mathbf{S}_F$  alebo matica váhových koeficientov  $\mathbf{Q}_F$ .