

12. VYUŽITIE ITERAČNÝCH METÓD PRI VYROVNANÍ A GEODETICKÝCH VÝPOČTOCH

Niektoré geodetické výpočty a výpočty, ktoré vedú k nejednoznačnému, resp. nespoľahlivému riešeniu, sú predurčené k iteračnému výpočtu. Kritériom použitia iteračného výpočtu voči klasickému je presnosť a spoľahlivosť výsledku.

Vyrovnanie sprostredkujúcich meraní a zostavovanie koeficientov podmienkových rovníc, ak funkčné vzťahy medzi meranými a vyrovnanými veličinami nie sú lineárne, vyžadujú zjednodušenie – linearizáciu vzťahov. Najčastejšie to vykonávame rozvojom do Taylorovho radu. Pri rozvoji vychádzame z predpokladu dostatočne presného odhadu linearizovaných veličín. Vtedy môžeme považovať parciálne derivácie vyšších rádov premenných vo funkčnom vzťahu, že majú zanedbateľnú (nulovú) hodnotu. Môže nastať prípad, keď odhad neznámych veličín môžeme dostatočne presne určiť, resp. ich hodnotu zvolíme v hodnote ľubovoľnej konštanty. Vtedy vyrovnanie vyžaduje aplikáciu iteračného riešenia.

Pri vyrovnaniach a výpočtoch analytickej fotogrametrie často riešime veľké systémy rovníc, pričom neznáme vyrovnané veličiny sú čiastočne korelované. Toto vedie k zostaveniu slabo podmienenému systému rovníc. (Rovnice sú navzájom čiastočne lineárne závislé). Sú tiež prípady, že máme k dispozícii viac rovníc ako je určovaných (vyrovnávaných) veličín. Aj pri takýchto výpočtoch používame iteračné algoritmy.

Všeobecným cieľom iteračných výpočtov je:

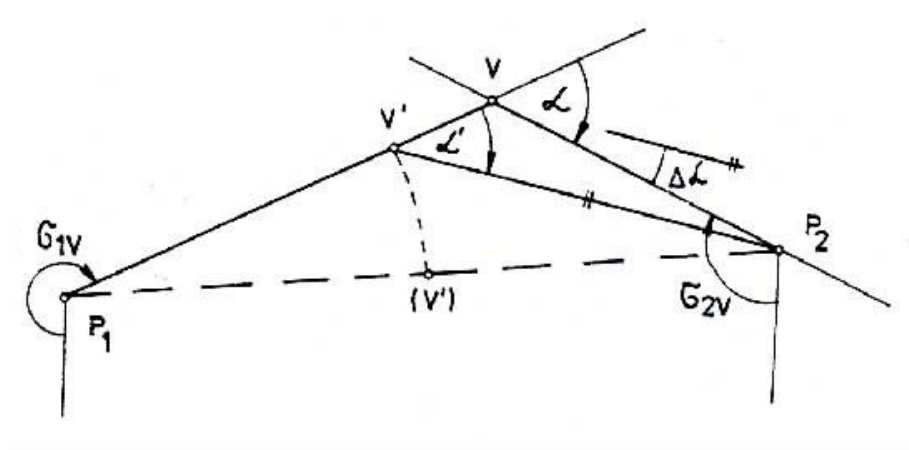
- zvýšiť presnosť výpočtu do úrovne vyžadovaného kritéria,
- zjednodušiť zložitý výpočet,
- odstrániť nejednoznačné riešenie.

Iteračné postupy riešenia naznačíme na príkladoch.

12.1 Iteračný výpočet úlohy pretínania napred, ak uhol prieseku $\gamma \approx 200^\circ$

Pri aplikácii pretínania napred (PN), do merania a výpočtov zahrňame len také kombinácie, u ktorých uhol prieseku zaistí spoľahlivý výpočet súradníc meraného bodu. V praxi železničnej geodézie nie je niekedy možné vytvoriť viac ako jednu kombináciu PN (výpočet priesečníka dotyčníc). Pritom ak uhol prieseku dotyčníc $\gamma \approx 200^\circ$ ($197^\circ \leq \gamma < 200^\circ$), výpočet súradníc metódou PN je nespoľahlivý a nemôžeme požiť analytické metódy projektovania a rekonštrukcie koľaje. Vtedy použijeme iteračný postup výpočtu súradníc.

Napr. majme dané súradnice bodov P_1 a P_2 a smerníkov σ_{1V} a σ_{2V} (obr. 12.1).



Obr. 12.1. Pretínanie napred

Súradnice bodu V vypočítame iteračným postupom metódou zhustovania intervalu výpočtu. Zvolíme smer iteračného výpočtu, napr. na dotyčnici t_1 a budeme počítať súradnice bodu V' , pokiaľ

$$|\Delta\alpha| < \varepsilon, \quad (12.1)$$

kde ε je zvolená presnosť výpočtu (napr. $\varepsilon = (1.10^{-6})^\circ$),

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha' - \alpha, \\ \alpha' &= \sigma_{V'2} - \sigma_{1V}, \\ \alpha &= \sigma_{V2} - \sigma_{1V}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

a) Zvolíme východiskové podmienky výpočtu:

- začiatočnú polohu bodu V' na spojnici P_1V' . Môžeme položiť $V' = P_1$, alebo V' umiestnime do ľubovoľnej vzdialenosti od bodu P_1 (napr. $s_{1V'} = s_{12} / 2$),
- východiskový interval iterácie s (napr. $s = 10$ m).

b) Telo cyklu obsahuje:

- výpočet súradníc y'_V, x'_V v smere σ_{12} vo vzdialenosti $s_{1V'}$,
- výpočet uhla

$$\alpha' = \sigma_{V'2} - \sigma_{1V} \text{ a} \quad (12.3)$$

- rozdielu uhlov

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha, \quad (12.4)$$

- určenie smeru iteračného približovania sa k bodu V podľa znamienka

$$a = \text{sign}(\Delta\alpha), \quad (12.5)$$

- test ukončenia výpočtu, resp. nové podmienky v nasledujúcom iteračnom cykle.

$$\text{Ak } |\Delta\alpha| < \varepsilon, \text{ výpočet je ukončený a} \quad (12.6)$$

$$y_V = y'_V \text{ a } x_V = x'_V.$$

Od 2. Iterácie ak

$$|\Delta\alpha| \geq \varepsilon \quad (12.7)$$

a $\text{sign}(\Delta\alpha) = a$, potom položíme $s_{1V'} = s_{1V'} + s$ a pokračujeme v novom cykle.

Ak $\text{sign}(\Delta\alpha) \neq a$, vrátime sa k predchádzajúcemu kroku $s_{1V'} = s_{1V'} - s$, zhustíme interval

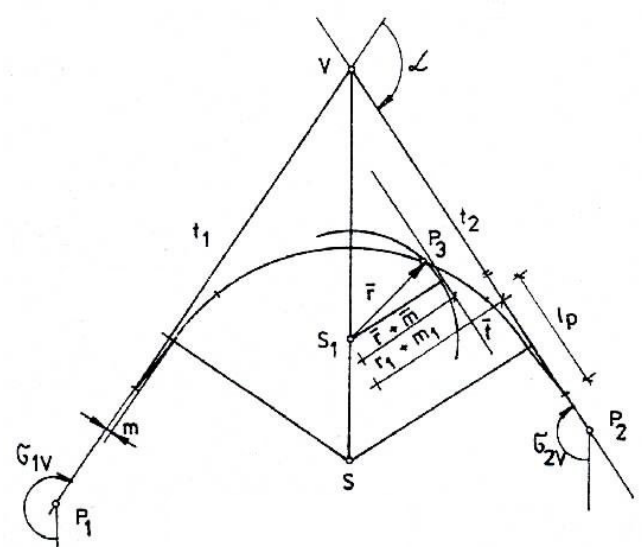
$$s = s/10 \text{ a vypočítame novú vzdialenosť} \quad (12.8)$$

$$s_{1V'} = s_{1V'} + s.$$

Ďalej pokračujeme v ďalšom cykle iteračného výpočtu.

12.2 Iteračný výpočet polomeru kružnicového oblúka

Dané sú dotyčnice $t_1[P_1(y_1, x_1), \sigma_{1V}]$ a $t_2[P_2(y_2, x_2), \sigma_{2V}]$, bod na kružnicovom oblúku $P_3(y_3, x_3)$ a dĺžka krajných prechodníc ℓ_p (obr. 12.2).



Obr. 12.2. Výpočet polomeru oblúka

V literatúre sa uvádzajú postupy riešenia, ktoré sú dosť zložité. Založené sú na: aplikácii geometrickej poučky o mocnosti bodu ku kružnici, riešení sústavy lineárnych a nelineárnych rovníc, iteračnom výpočte o iterácii 8-ich premenných.

Polomer vypočítame metódou zhutňovania intervalu výpočtu.

a) Vstupný výpočet na východiskové podmienky:

- metódou PN z bodov P_1, P_2 a smerníkov σ_{1V}, σ_{2V} vypočítame súradnice priesečníka dotyčníc y_V, x_V .

- zvolíme začiatkové podmienky iterácie:

$r_1 = 150$ m (minimálny polomer, môžeme zvoliť aj $r_1 = 0$) a začiatkový interval napr.

$r_k = 1000$ m.

b) V tele cyklu vypočítame:

$$r_1 = r_1 + r_k,$$

odsadenie kružnicového oblúka

$$m_1 = \frac{\ell_p}{3} \operatorname{tg} \lambda - r_1 (1 - \cos \lambda), \quad (12.9)$$

kde

$$\lambda = \arcsin \left(\frac{\ell_p}{2r_1} \right),$$

dĺžku dotyčnice

$$t_1 = (r_1 + m_1) \operatorname{tg} \alpha / 2$$

a súradnice stredu kružnicového oblúka $S_1(y_{S1}, x_{S1})$.

$$y_{S1} = y_V + t_1 \sin \sigma_{V2} + (r_1 + m_1) \sin \sigma_{T1S1}, \quad (12.10)$$

$$x_{S1} = x_V + t_1 \cos \sigma_{V2} + (r_1 + m_1) \cos \sigma_{T1S1},$$

- pre polomer $\bar{r} = \sqrt{(y_3 - y_{S1})^2 + (x_3 - x_{S1})^2}$ vypočítame $(\bar{m} + \bar{r})$ a porovnáme s $(m_1 + r_1)$.

Ak

$$|(\bar{m} + \bar{r}) - (m_1 + r_1)| < \varepsilon, \quad (12.11)$$

\bar{r} je hľadaný polomer kružnicového oblúka.

Ak

$$(\bar{m} + \bar{r}) < (m_1 + r_1), \quad (12.12)$$

potom $r_1 = r_1 + r_k$ a pokračujeme v novom cykle výpočtu.

Ak

$$(\bar{m} + \bar{r}) > (m_1 + r_1), \quad (12.12)$$

potom $r_1 = r_1 - r_k$,

$$r_k = r_k/10,$$

$$r_1 = r_1 + r_k.$$

Iteračný cyklus (9) – (13) končí splnením nerovnice (11).

12.3 Iteračný výpočet priesečníka priamky s krivkou

Kubická parabola $y = \gamma \frac{x^3}{6r\ell_p}$ je určená polomerom r , dĺžkou prechodnice ℓ_p , súradnicami

$ZP(y_{ZP}, x_{ZP})$ a smerníkom $\sigma_{ZP,V}$.

Výpočet priesečníka krivky s priamkou $p \equiv [P(y_p, x_p)\sigma]$ vyžaduje vypočítať z geodetických súradníc bodov ZP a P

\bar{x}_{Qi} a

$$\bar{y}_{Qi} = \gamma \frac{\bar{x}_{Qi}^3}{6r\ell_p} \quad (\text{obr. 12.3}), \quad (12.14)$$

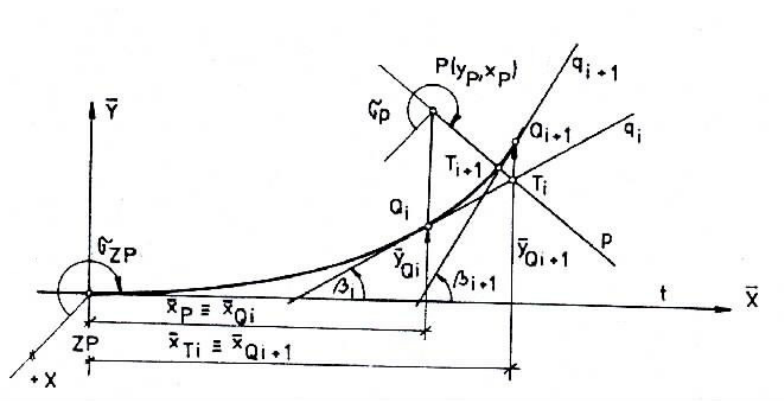
kde

$$\gamma = \frac{1}{\cos \lambda}.$$

Bodom Q_i vedieme dotyčnicu k parabole, ktorej uhol

$$\beta_i = \arctg\left(\frac{\bar{x}_{Qi}^2}{2r\ell_p \cos \lambda}\right) = k \quad (12.15)$$

je smernicou dotyčnice q_i .



Obr. 12.3. Výpočet súradníc priesečníka bodu priamky s krivkou

Súradnice bodu T_i vypočítame ako priesečník priamok p a q , ktoré použijeme na výpočet súradníc $\bar{x}_{Q_{i+1}}$ a $\bar{y}_{Q_{i+1}}$.

Iteračný výpočet súradníc priesečníka paraboly a priamky je ukončený, ak

$$|\bar{y}_{Q_{i+1}} - \bar{y}_{Q_i}| < \varepsilon.$$

12.4 Riešenie rozsiahlych systémov rovníc

Majme napr. normálne rovnice v tvare

$$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = \mathbf{b}, \text{ resp.} \quad (12.17)$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{b}. \quad (12.18)$$

Vyriešením systému rovníc (12.17) dostaneme vektor neznámych $\mathbf{x}^{(1)}$, ktorý dosadíme do rovnice (12.17) a vypočítame pravú stranu systému rovníc (12.17):

$$\mathbf{N}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)}. \quad (12.19)$$

Rozdiel vektorov $\mathbf{b} - \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{z}^{(1)}$ je vektor reziduí, s ktorým opakovanne riešime systém rovníc

$$\mathbf{N}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{z}^{(1)}. \quad (12.20)$$

Výsledkom riešenia je vektor $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$. Opravené neznáme po 1. iterácii majú hodnoty:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \bar{\mathbf{x}}^{(1)}. \quad (12.21)$$

Riešenie (12.19) až (12.21) sa cyklicky opakuje dovtedy, kým nie je splnená podmienka

$$|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}| < \varepsilon,$$

kde ε je vyžadovaná presnosť výpočet.

Pri iteračných výpočtoch je dôležité vždy sledovať konvergenciu postupnosti iterovanej veličiny (vektora). Pri počítačovom iteračnom postupe divergencie výpočtu zabránime limitovaním počtu iterácií. Z uvedeného vyplýva nedostatok iteračnej metódy riešenia v tom, že iterácia konverguje iba pri splnení určitých podmienok, ktoré definujeme pri analýze algoritmu riešenia.

Programovanie iteračných výpočtov má štandardný charakter. Na začiatok definujeme vstupné údaje, ktoré spresňujeme v tele cyklu dovtedy, pokiaľ nie je splnené kritérium iteračného riešenia.