

U nás tiažový bod zvolil v roku 1926 prof. B. Kladivo v suteréne budovy Českej techniky v Brne a v postupimskej tiažovej sústave relatívnou metódou Fechnerovým štvorkyvadlovým prístrojom odvodil jeho tiažové zrýchlenie, ktorého hodnota je

$$g = 980,961,1 \pm 0,93 \text{ mgal.} \quad (1.27)$$

1.3 Geometrická geodézia

Na zložitej a nepravidelnej ploche geoidu alebo kvázigeoidu nie možné v praxi riešiť geodetické úlohy, alebo na ne zobrazit' väčšie časti zemského povrchu, pretože tieto plochy nie je možné analyticky jednoducho vyjadriť. Aproximáciami geoidu, resp. kvázigeoidu na výpočtové a zobrazovacie práce sú rôzne definované elipsoidy, guľové plochy a roviny.

1.3.1 Referenčný elipsoid

Parametre zemského elipsoidu sa určujú z tzv. stupňových meraní. Z rôzne rozsiahlych a stále presnejších stupňových meraní boli postupne určené parametre viacerých rotačných zemských elipsoidov. Plochu geoidu by najlepšie aproximoval trojosový zemský elipsoid. Geometria trojosového elipsoidu je však tak zložitá, že v geodetickej praxi sa zásadne používajú rotačné elipsoidy. Ak je určitý zemský elipsoid zvolený pre geodetický systém, nazýva sa referenčný elipsoid.

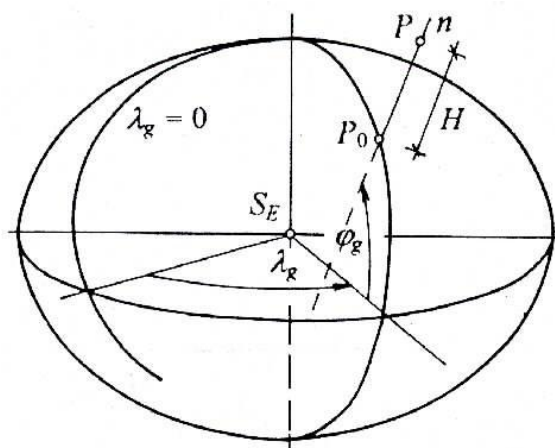
Z hladinových elipsoidov sa ako optimálna aproximácia geoidu prijíma stredný zemský elipsoid. K tomuto optimálnemu modelu Zeme sa približovali rôzne referenčné elipsoidy napr. Besselov (1841), Krasovského (1940). Oba tieto elipsoidy tvoria základ kartografického zobrazenia a polohového súradnicového systému v bývalom Československu a teraz na Slovensku. V súčasnosti stredný zemský elipsoid najlepšie aproximuje referenčný elipsoid IAG 1980, prijatý na 17. valnom zhromaždení Medzinárodnej geodetickej a geofyzikálnej únie. Označuje Európsky terestrický referenčný systém 1989 (ETRS 89). Je definovaný takto:

- dĺžka veľkej poloosi ekvipotenciálneho elipsoidu $a = 6\,378\,137 \pm 2 \text{ m}$, $b = 6\,356\,877 \text{ m}$,
- geocentrická gravitačná konštanta $GM = (3\,986\,005 \pm 0,5)10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$,
- dynamické sploštenie (zonálny geopotenciálny koeficient druhého stupňa) $J_2 = (1082,63 \pm 0,005)10^{-6}$,
- uhlová rýchlosť rotácie Zeme $w = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$.

Rovnakými parametrami je definovaný Svetový geodetický systém WGS 84.

Vo všeobecnosti každý rotačný zemský (referenčný) elipsoid je jednoznačne definovaný dvoma parametrami meridiánovej elipsy (veľkou poloosou a a malou poloosou b , resp. poloosou a a sploštením elipsoidu i).

Besselov elipsoid má parametre $a = 6\,377\,397,15508 \text{ m}$ a $i = 1 : 299,152\,812\,853$.



Obr. 1.8. Geodetické elipsoidické súradnice

1.3.2 Systém geodetických zemepisných súradníc

Súradnicovým systémom na rotačných referenčných elipsoidoch sú geodetické elipsoidické zemepisné súradnice

$S_E(\varphi_g, \lambda_g, H)$, (obr.1.8)

kde S_E je stred elipsoidu,

φ_g je geodetická zemepisná šírka,

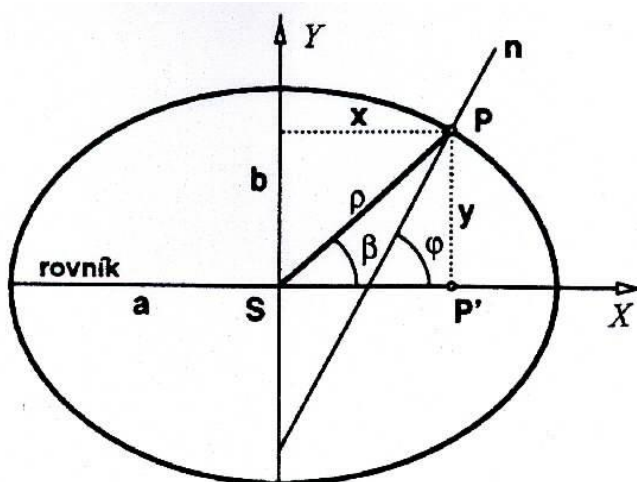
λ_g je geodetická zemepisná dĺžka,

H je elipsoidická (geodetická) výška.

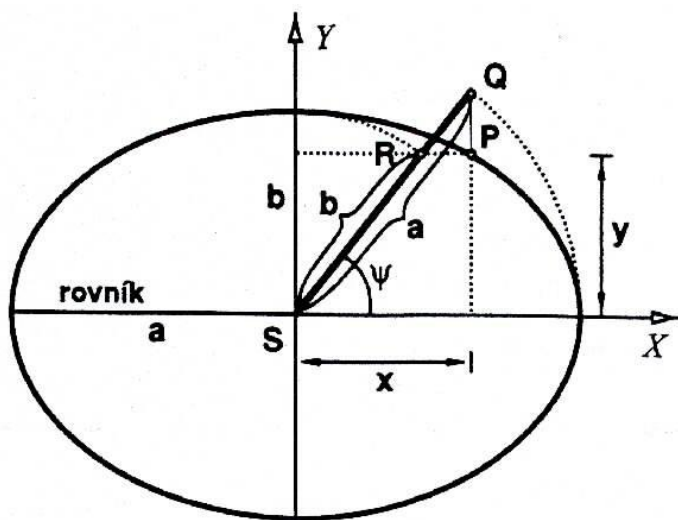
Za nulový poludník je zvolený ten, ktorý prechádza daným bodom astronómického observatória v Greenwichi.

Geocentrická šírka b

Pri riešení niektorých úloh v matematickej kartografii sa namiesto šírky j bodu P zavádza geocentrická šírka b . Je to uhol, ktorý zvierajú spojnice bodu P so stredom elipsoidu (rádus – vektor r , obr. 1.9). Druhou súradnicou zostáva geodetická dĺžka l .



Obr. 1.9. Pravouhlé súradnice x, y a geocentrická šírka b



Obr. 1.10. Redukovaná šírka y

Redukovaná šírka y

V niektorých teoretických odvodeníach sa používa redukovaná šírka y . Bodom $P(j)$ vedme rovnobežku s osami X, Y . Oblúk kružnice s polomerom a , opísaný zo stredu S meridiánovej elipsy, pretne rovnobežku s osou Y v bode Q . Uhol, ktorý zvierá spojnica \overline{QS} s rovinou rovníka (na obr. 1.10 s veľkou poloosou meridiánovej elipsy), je redukovaná šírka y . Druhou súradnicou ostáva geodetická dĺžka l .

$$x = a \cos y, \quad y = b \cos(100 - y) = b \sin y. \quad (1.28)$$

1.3.3 Priestorové pravouhlé súradnice X, Y, Z

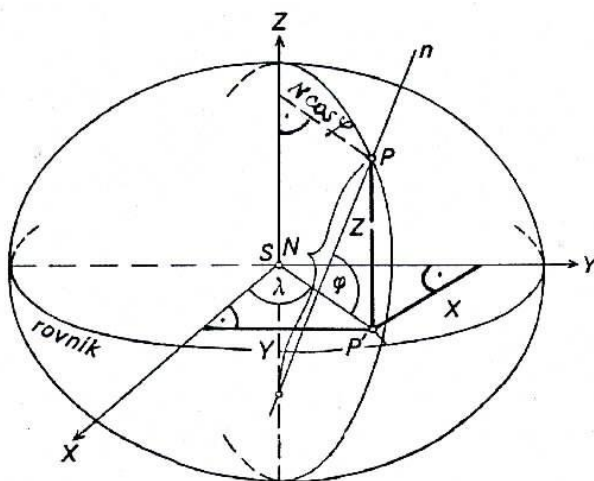
Riešenie geodetických úloh v priestorových pravouhlých súradniciach má veľmi dôležitú úlohu v družicovej geodézii pri vyjadrovaní priestorovej polohy bodov vo svetovom súradnicovom systéme (WGS 84).

Počiatok súradnicového systému je v strede elipsoidu. Os Z je totožná s osou rotácie. Os X je priesečnicou roviny rovníka s rovinou nultého poludníka, os Y je v rovine rovníka kolmá na os X (obr. 1.11).

Priestorové súradnice bodu P sú dané vzťahmi

$$X = N \cos j \cos l, \quad Y = N \cos j \sin l, \quad Z = y = N(1 - e^2) \sin j, \quad (1.29)$$

kde N je priečný polomer krivosti v bode P . Rovnice (1.29) sú odvodené v kap. 1.3.7.



Obr. 1.11. Priestorové súradnice X, Y, Z

1.3.4 Elipsa

Elipsa je množina bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov nazývanými ohniskami F_1 a F_2 je konštantný.

Označme $2c$ vzdialenosť medzi ohniskami F_1 a F_2 (obr. 1.12). Súradnice ohnísk elipsy budú $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

$M(x, y)$ je ľubovoľným bodom elipsy. Potom pre vzdialenosti r_1 a r_2 bodu $M(x, y)$ od bodov $F_1(-c, 0)$ a $F_2(c, 0)$ je

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad (1.30)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

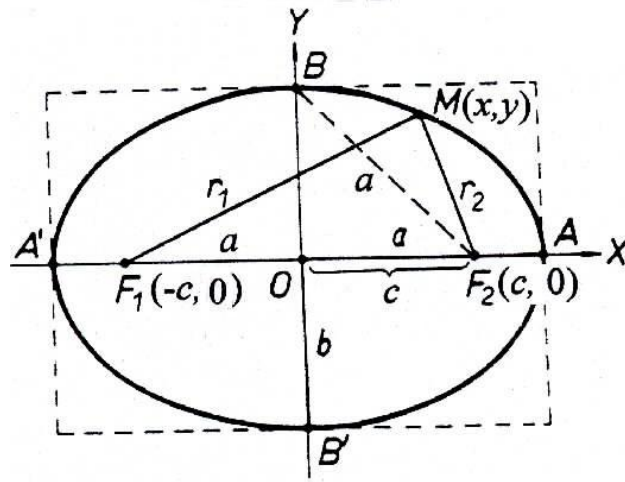
Súčet týchto vzdialeností musí byť konštantný, označíme ho $2a$

$$r_1 + r_2 = 2a . \quad (1.31)$$

Ak násobíme rovnicu (1.31) rozdielom $r_1 - r_2$, dostaneme

$$r_1^2 - r_2^2 = 2a(r_1 - r_2) \text{ a z toho dostávame}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2a} . \quad (1.32)$$



Obr. 1.12. Elipsa

Ak do čitateľa pravej strany rovnice (1.32) namiesto r_1 a r_2 dosadíme hodnoty (1.30), dostaneme

$$r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - ((x-c)^2 + y^2) = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 4xc \quad (1.33)$$

Rovnica (1.32) po úprave bude

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a} . \quad (1.34)$$

Z rovnice (1.32) a (1.34) po ich spočítaní a odčítaní dostaneme

$$\begin{aligned} 2r_1 &= \frac{2cx}{a} + 2a, & 2r_2 &= 2a - \frac{2cx}{a}, \\ r_1 &= a + \frac{cx}{a}, & r_2 &= a - \frac{cx}{a}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ak teraz do prvej rovníc (1.35) dosadíme namiesto r_1 jeho hodnotu z rovnice (1.30), dostaneme

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a} .$$

Umocnením a zlúčením dostaneme

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}, \\ a^2 x^2 + 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 - a^4 - 2a^2 cx - c^2 x^2 &= 0, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pretože z definície elipsy $r_1 + r_2 > F_1 F_2 = 2c$ platí $2a > 2c$, môžeme položiť

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Rovnica (1.36) nadobudne tvar

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Keď rovnicu predelíme výrazom $a^2 b^2$ dostaneme rovnicu elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.37)$$

Ak v rovnici elipsy (1.37) položíme $b = a$, dostaneme rovnicu kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (1.38)$$

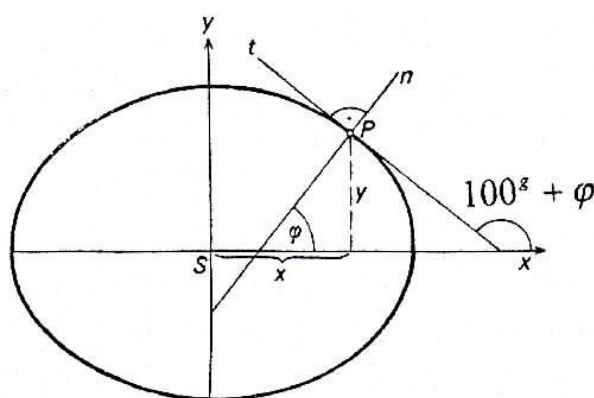
ktorá je zvláštnym prípadom elipsy.

1.3.5 Vzťah medzi geodetickou šírkou j_g ($\circ j$) bodu P a jeho pravouhlými súradnicami v rovine meridiánovej elipsy

Bodom P na elipsoide prechádza poludník (meridián) o zemepisnej dĺžke l . Je to elipsa s poloosami a, b , ktorú nazývame meridiánová elipsa. Ak zvolíme začiatok pravouhlého rovinového súradnicového systému v strede S meridiánovej elipsy, veľkú poloos za os X , malú za os Y , bude rovnica tejto elipsy (1.37), (obr.1.13)

Uhol, ktorý zvierá normála n k elipse v tomto bode s veľkou poloosou X , je geodetická šírka j bodu P . (Pre jednoduchosť budeme používať označenie j , nie j_g , pretože nie je potrebné rozlišovať medzi geodetickou šírkou j_g a astronomickou šírkou j_a . Dotyčnica t v bode P zvierá s osou X uhol $100^g + j$. Jej smernica je daná vzťahom

$$k = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(100^g + j) = -\operatorname{cotg} j. \quad (1.39)$$



Obr. 1.13. Pravouhlé súradnice v rovine meridiánovej elipsy

Derivovaním rovnice elipsy (1.37) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Z rovníc (1.39) a (1.40) vyplýva

$$\cotg j = \frac{b^2 x}{a^2 y} . \quad (1.41)$$

Táto rovnica vyjadruje geodetickú šírku j ako funkciu pravouhlých súradníc x , y v rovine meridiánovej elipsy. Dosadíme do rovnice (1.41)

$$\cotg j = \frac{\cos j}{\sin j} ,$$

rovniciu umocnime na druhú a upravíme

$$\frac{\cos^2 j}{\sin^2 j} = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} ,$$

$$a^4 y^2 \cos^2 j - b^4 x^2 \sin^2 j = 0. \quad (1.42)$$

Ďalej využijeme upravenú rovniciu meridiánovej elipsy (1.37)

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (1.43)$$

Riešme tieto dve rovnice. Z rovnice (1.43) vyjadríme x^2 a dosadíme do rovnice (1.42) a vypočítame súradnicu y

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2} ,$$

$$a^4 y^2 \cos^2 j - b^4 \left(\frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2} \right) \sin^2 j = 0,$$

$$a^2 y^2 \cos^2 j - b^4 \sin^2 j + b^2 y^2 \sin^2 j = 0,$$

$$y^2 (a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j) - b^4 \sin^2 j = 0,$$

$$y = \frac{b^2 \sin j}{\sqrt{a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j}} . \quad (1.44)$$

Podobne odvodíme

$$x = \frac{a^2 \cos j}{\sqrt{a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j}} . \quad (1.45)$$

Okrem sploštenia $i = (a - b) a^{-1}$ je ďalším parametrom charakterizujúcim rotačný elipsoid tzv. prvá excentricita

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} . \quad (1.46)$$

Vzťah (1.46) môžeme upraviť na tvar

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \Rightarrow b = a \sqrt{1 - e^2} , \quad a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.47)$$

a dosadiť do rovníc (1.44) a (1.45). Postup úpravy menovateľa v rovniciach (1.44) a (1.45):

$$(a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j) = a^2 [\cos^2 j + (1 - e^2) \sin^2 j] = a^2 [(\cos^2 j + \sin^2 j) - e^2 \sin^2 j] = a^2 (1 - e^2 \sin^2 j).$$

Spolu s úpravou čitateľa potom bude

$$y = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin j}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \sin^2 j)}} = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}} = \frac{b\sqrt{1 - e^2} \sin j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}}, \quad (1.48)$$

$$x = \frac{a^2 \cos j}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \sin^2 j)}} = \frac{a \cos j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}}. \quad (1.49)$$

Keď označíme $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}$, rovnice (1.48) a (1.49) zapíšeme

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{W} \quad \text{a} \quad x = \frac{a \cos j}{W}. \quad (1.50)$$

Rovnice (1.44), (1.45), (1.48) a (1.49) sú parametrické rovnice meridiánovej elipsy. Parametrami sú zemepisná šírka j , obe poloosi a, b a prvá excentricita e^2 .

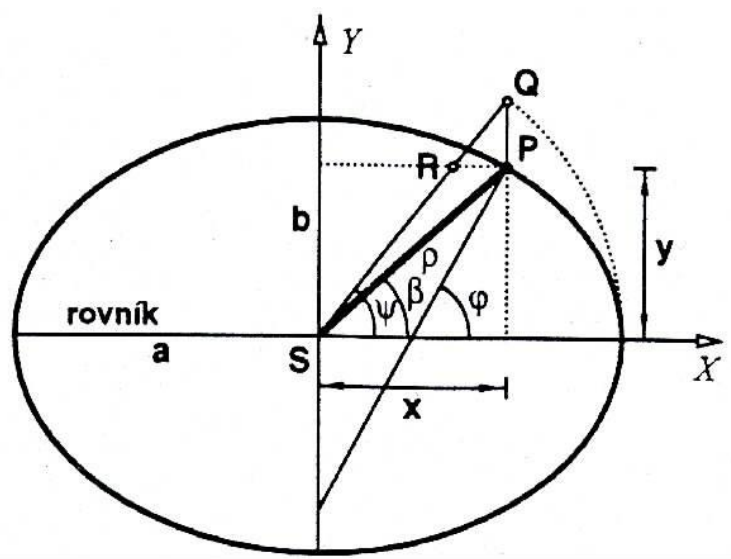
Vzťah medzi geocentrickou šírkou b a geodetickou šírkou j

Podľa obr. 1.14

$$\operatorname{tg} b = \frac{y}{x} = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{a \cos j} = (1 - e^2) \operatorname{tg} j. \quad (1.51)$$

Geocentrický polomer (rádus – vektor) po dosadení za x a y (1.49) (1.48) bude

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{\frac{a^2}{W^2} [\cos^2 j + (1 - e^2)^2 \sin^2 j]} = \frac{a}{W} \sqrt{\cos^2 j + (1 - 2e^2 + e^4) \sin^2 j} = \\ &= \frac{a}{W} \sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 j}. \end{aligned} \quad (1.52)$$



Obr. 1.14 Geocentrická šírka b a redukovaná šírka y

Vzťah medzi redukovanou šírkou y a geodetickou šírkou j

Z predchádzajúceho vieme, že

$$x = a \cos Y, \quad y = b \sin Y \quad \text{a odtiaľ} \quad \operatorname{tg} Y = \frac{a}{b} \frac{y}{x}. \quad (1.53)$$

Podľa rovnice (1.51)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} b = (1 - e^2) \operatorname{tg} j \quad (1.54)$$

ďalej platí

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.55)$$

Po dosadení hodnôt (1.54) a (1.55) do rovnice (1.53) dostaneme základný vzťah medzi redukovanou šírkou y a geodetickou j šírkou v tvare

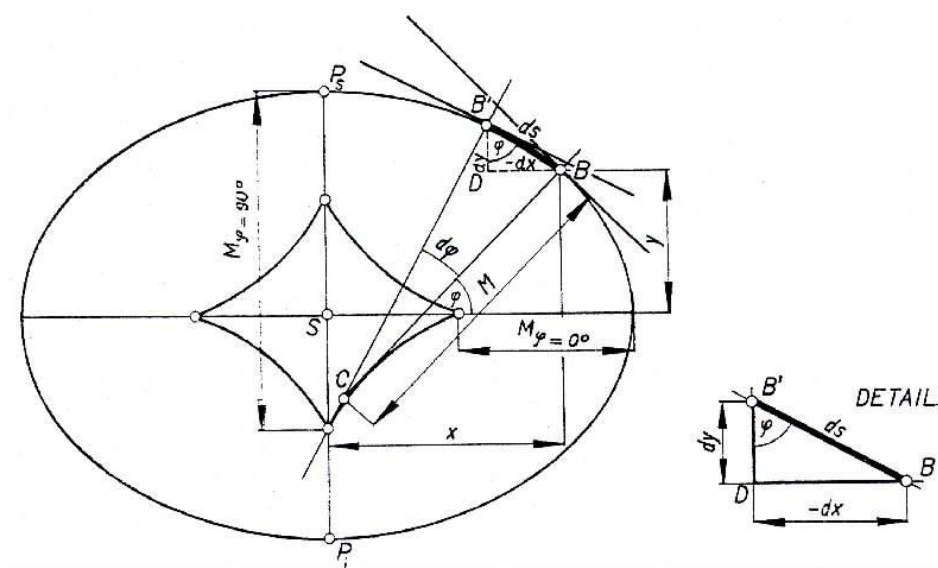
$$\operatorname{tg} Y = \frac{(1 - e^2) \operatorname{tg} j}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} j. \quad (1.56)$$

1.3.6 Polomery krivosti v danom bode na elipsoide

Normálou k elipsoidu v bode P môžeme preložiť nekonečne mnoho rovín, ktoré sú kolmé k povrchu elipsoidu. Existujú dva extrémne normálové rezy, ktorých krivosť je maximálna a minimálna. Sú to hlavné normálové rezy a zodpovedajúce polomery krivosti sú hlavné polomery krivosti: meridiánový polomer krivosti M a priečný polomer krivosti N (v rovine kolmej na poludník).

Meridiánový polomer krivosti

Normálová rovina preložená osou rotácie elipsoidu a bodom B pretína elipsoid v poludníku. Bod B má geodetickú šírku j a pravouhlé súradnice v rovine meridiánu x, y (obr.1.15).



Obr. 1.15. Meridiánový polomer krivosti

Ak prejdeme z bodu B o dĺžkový element ds do bodu B' , zmení sa geodetická šírka o dj , súradnice x a y sa zmenia o hodnoty $-dx$ a $+dy$ (x -ová súradnica sa zmenší). Z obr. 1.15 je zrejmé, že

$$ds = M dj . \quad (1.57)$$

Elementárny oblúk ds vyjadríme z trojuholníka $BB'D$

$$\sin \varphi = \frac{-dx}{ds} \Rightarrow ds = \frac{-dx}{\sin j} . \quad (1.58)$$

Po dosadení rovnice (1.58) do rovnice (1.57) dostaneme vzťah:

$$M = - \frac{1}{\sin j} \frac{dx}{dj} . \quad (1.59)$$

Hodnotu $\frac{dx}{dj}$, ktorú potrebujeme dosadiť do vzťahu (1.59) vypočítame derivovaním funkcie

$$x = \frac{a \cos j}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} = a \cos j \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-1/2}$$

podľa j .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dj} &= a \left[-\sin j \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-1/2} + \cos j \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-3/2} (-e^2) 2 \sin j \cos j \right] = \\ &= \frac{-a \sin j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{1/2}} + \frac{ae^2 \sin j \cos^2 j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{-a \sin j \left(1-e^2 \sin^2 j\right) + ae^2 \sin j \cos^2 j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{-a \sin j \left(1-e^2 \sin^2 j - e^2 \cos^2 j\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{-a \sin j \left[1-e^2 \left(\sin^2 j + \cos^2 j\right)\right]}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{-a \sin j \left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Po dosadení do rovnice (1.59) dostaneme pre meridiánový polomer krivosti vzťah

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} . \quad (1.61)$$

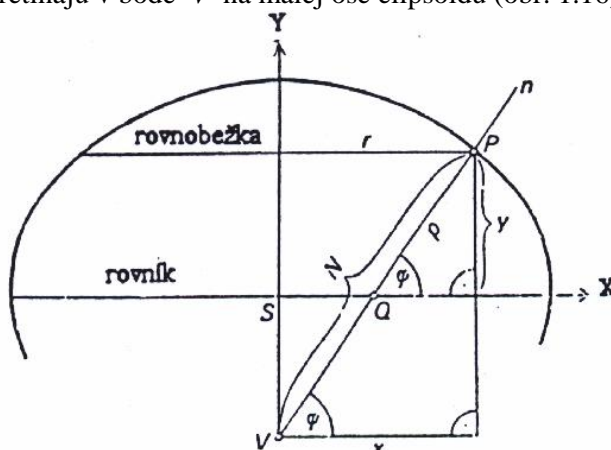
Zo vzťahu (1.61) je zrejmé, že meridiánový polomer krivosti M pre určitý elipsoid s parametrami a, e^2 je funkciou len geodetickej šírky j . Minimálnu hodnotu má na rovníku ($j = 0^\circ$, $\sin j = 0$) $M_0 = a(1-e^2)$ a maximálnu na póloch ($j = 100^\circ$, $\sin \varphi = 1$) $M_{100} = a(1-e^2)^{-1/2}$.

Ak by sme plynulo vyšetrovali priebeh meridiánového polomeru krivosti od pólu (P_s) po rovník vo všetkých kvadrantoch, geometrické miesta stredov polomeru krivosti M ležia na krivke hviezdicového tvaru (obr. 1.15).

Priečný polomer krivosti

Rovina, ktorá obsahuje normálu n v danom bode P a je kolmá k rovine poludníka, pretína elipsoid v priečnom normálovom reze. Je to tiež elipsa okrem prípadu keď bod P leží na rovníku,

vtedy je to kružnica. Normály k elipsoidu skonštruované vo všetkých bodoch tej istej rovnobežky s geodetickou šírkou j , sa pretínajú v bode V na malej ose elipsoidu (obr. 1.16).



Obr. 1.16. Priečný polomer krivosti

Priečný polomer krivosti N je daný úsečkou normály N . Z obr. 1.16 je zrejmé, že $x = N \cos j$ a teda

$$N = \frac{x}{\cos j}. \quad (1.62)$$

Ak dosadíme za x rovnicu (1.49)

$$N = \frac{a \cos j}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} \cdot \frac{1}{\cos j} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} = \frac{a}{W}. \quad (1.63)$$

Na rovníku ($j = 0^\circ$) je $N_0 = a$ a na póloch ($j = 90^\circ$) keď $\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a}$ je

$$N_{100} = \frac{a}{(1-e^2)^{1/2}} = \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b}. \quad (1.64)$$

Stredný polomer krivosti

Stredný polomer krivosti je daný geometrickým priemerom hlavných polomerov krivosti M a N

$$R = \sqrt{MN}. \quad (1.65)$$

Po dosadení za M a N môžeme písať

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 j)^{3/2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 j}. \quad (1.66)$$

Polomer náhradnej zemegule

V niektorých menej náročných výpočtoch sa celý zemský elipsoid nahrádza guľou. Polomer R tejto zemegule sa určuje tromi spôsobmi:

1. Guľa má rovnaký objem ako elipsoid, t. j.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad \text{a teda} \quad R = \sqrt[3]{a^2 b} . \quad (1.67)$$

2. Guľa má rovnaký povrch ako elipsoid, t. j.

$$4\pi R^2 = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right) \quad \text{a teda}$$

$$R = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots} \quad (1.68)$$

3. Guľa má polomer rovný aritmetickému priemeru všetkých troch poloosí elipsoidu

$$R = \frac{a + b + a}{3} . \quad (1.69)$$

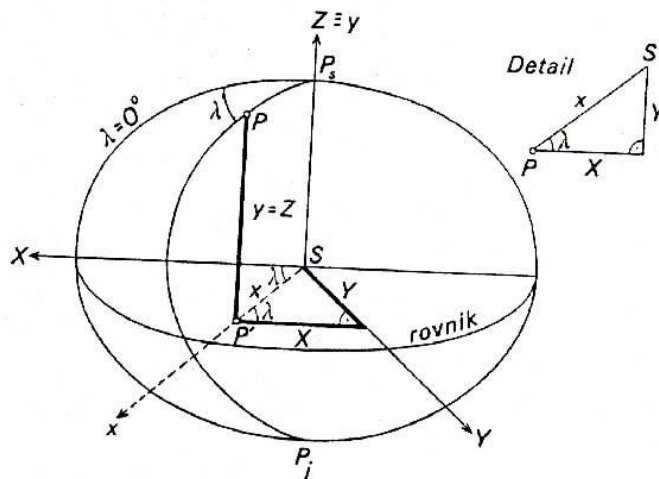
Všetky tri hodnoty R sú po zaokrúhlení na 0,1 km prakticky rovnaké:

$R = 6\,370,3$ km pre elipsoid Besselov,

$R = 6\,371,1$ km pre elipsoid Krasovského,

$R = 6\,371,0$ km pre elipsoid WGS 84.

1.3.7 Vzťah medzi geodetickými zemepisnými súradnicami j, l a priestorovými pravouhlými súradnicami X, Y, Z



Obr. 1.17. Vzťah geodetických zemepisných súradníc j, l a priestorových súradníc X, Y, Z

Na obr. 1.17 je nulový Greenwichský poludník nakreslený v rovine obrázka. Bodom P prechádza poludník $P_S - P - P_J - P_S$ o geodetickej dĺžke l . V rovine tohto poludníka má bod P pravouhlé súradnice dané rovnicami (1.50).

Podľa definície pravouhlého súradnicového systému v kap. 1.3.3 a obr. 1.17 platí

$$X = x \cos I, \quad Y = x \sin I, \quad Z = y. \quad (1.70)$$

Keď dosadíme do rovníc (1.70) súradnice x a y z rovníc (1.50) dostaneme

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{W} \cos j \cos I = N \cos j \cos I, \\ Y &= \frac{a}{W} \cos j \sin I = N \cos j \sin I, \\ Z &= \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin j = N (1 - e^2) \sin j, \end{aligned} \quad (1.71)$$

keď priečný polomer krivosti $N = \frac{a}{W}$ (kap. 1.3.6).

1.3.8 Výpočet dĺžky oblúka poludníka a rovnobežky

Výpočet dĺžky oblúka poludníka (rektifikácia meridiánu)

Na meridiánovej elipse leží bod $B(j)$. V diferenciálnej vzdialenosti ds od bodu B je bod $B'(j + dj)$ (obr. 1.15).

Polomer krivosti meridiánu v bode B je M . Z obrázku 1.15 je

$ds = M dj$ a po dosadení do rovnice (1.61) dostaneme diferenciál oblúka

$$ds = a(1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2} dj. \quad (1.72)$$

Oblúk s od rovníka ($j = 0^\circ$) po bod s geodetickou šírkou j vypočítame integráciou rovnice (1.72)

$$s = \int_0^j M dj = a(1 - e^2) \int_0^j (1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2} dj. \quad (1.73)$$

Eliptický integrál na pravej strane rovnice (1.73), ktorý nemá uzatvorené riešenie, je možné počítat dvojakým spôsobom:

1. rozvinutím funkcie $(1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2}$ do radu podľa binomickej vety alebo
2. numerickou integráciou na PC. Takmer každý softvér, určený pre numerické metódy, obsahuje program pre numerickú integráciu.

Dĺžka oblúka rovnobežky

Ravnobežka o geodetickej šírke j je kružnica s polomerom $r = N \cos j$ (obr. 1.16).

Oblúk s rovnobežky medzi bodmi o geodetických dĺžkach I_1, I_2 je oblúkom kružnice s polomerom r pri stredovom uhle $\Delta I = I_2 - I_1$, t. j.

$$s = N \cos j \frac{\Delta I''}{r''} = \frac{N}{r''} \cos j \Delta I'' \quad (1.74)$$

Poznámka: Veličina $\cos j / r''$ sa zostavuje do tabuliek k argumentu j .

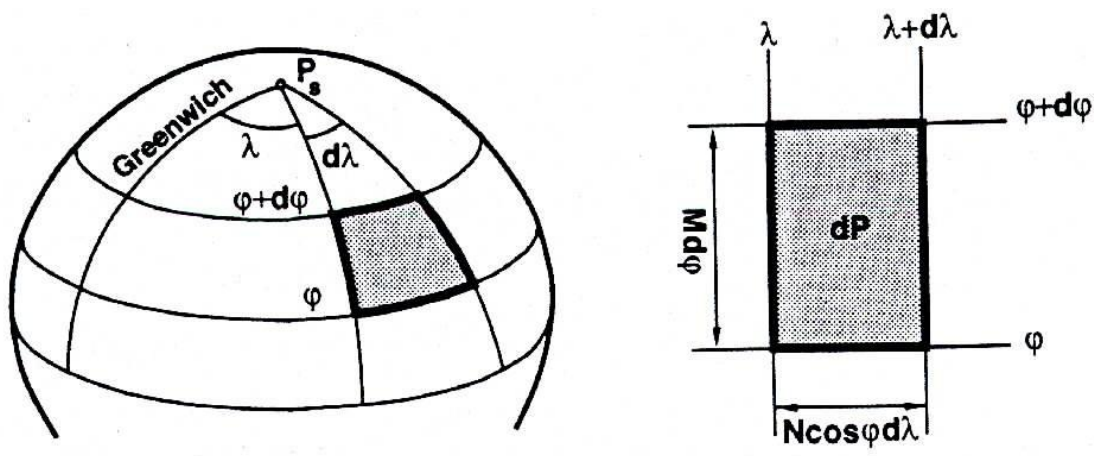
1.3.9 Povrch časti a celého elipsoidu

Sieť poludníkov a rovnobežiek vytvára na povrchu elipsoidu elipsoidické lichobežníky (obr. 1.18). Diferenciálny lichobežník môžeme považovať za rovinný obdĺžnik o stranách Mdj a $N \cos j \, dl$, ktorého obsah je

$$dP = MN \cos j \, dj \, dl \quad (1.75)$$

Ak dosadíme za M, N dostaneme

$$dP = \frac{a^2(1-e^2)\cos j}{(1-e^2 \sin^2 j)^2} dj \, dl. \quad (1.76)$$



Obr. 1.18. Povrch časti zemského elipsoidu

Obsah lichobežníka, obmedzeného poludníkmi I_1, I_2 a rovnobežkami j_1, j_2 , by sme dostali integráciou rovnice (1.76) v medziach I_1, I_2 a j_1, j_2 . Plocha sa počíta od rovníka ($j = 0$) po rovnobežku j_1 , resp. j_2 :

$$\begin{aligned} P_0^j &= a^2(1-e^2) \int_{I_1}^{I_2} \int_0^j \cos j (1-e^2 \sin^2 j)^{-2} dj \, dl = \\ &= a^2(1-e^2)(I_2 - I_1) \int_0^j \cos j (1-e^2 \sin^2 j)^{-2} dj. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Počítaná plocha P je

$$P = P_0^{j_2} - P_0^{j_1} \quad (1.78)$$

Eliptický integrál na pravej strane rovnice (1.77) je možné (podobne ako u dĺžky oblúka meridiánu) riešiť dvojakým spôsobom:

1. rozvinutím funkcie $\cos j (1-e^2 \sin^2 j)^{-2}$ do rady podľa binomickej vety alebo
2. numerickou integráciou na PC.