

1. ZAKLADY VYŠŠEJ GEODÉZIE

Geodézia je náuka o meraní Zeme alebo jej častí a o meraní na zemi. (*Modernejšia verzia tej istej myšlienky by mohla znieť: geodézia je vedná disciplína o poznávaní priestoru a času v oblasti planéty Zeme pomocou merania spôsobilých štruktúr, najmä zemského povrchu a tiažového poľa*). Termín "geodézia" v zmysle aplikovanej geometrie sa našiel u Aristotela v 3. storočí pred. n. l. Geodézia sa delí na vyššiu a nižšiu geodéziu. (*Podľa - E.Buschmanna: Gedanken über die Geodäsie. Konrad Witwer 1992 sa geodézia používa:*

- v poznávacích procesoch (tvar a rozmery Zeme),
- v pracovných procesoch (projektovanie, stavba a prevádzka rôznych diel, plánovanie a pod.),
- v dokumentácii (geografické informačné systémy, kataster nehnuteľností).

Základnou úlohou geodézie je určiť vzájomnú polohu bodov vo vodorovnom a zvislom smere a zobraziť tieto body na mape.

Technickou úlohou geodézie je určiť rozmer, tvar a priestorovú polohu jednotlivých prirodzených alebo umelých predmetov merania a to vo vzájomnom vzťahu alebo ku geodetickým základom.

Nižšia geodézia zahŕňa meranie, výpočty a zobrazenie malých častí zemského povrchu, v ktorých je možné riešiť polohové úlohy v rovine a vo výškových prácach pokladať Zem za guľu.

Vyššia geodézia je vedný odbor, ktorý sa zaoberá určovaním tvaru a rozmerov zemského telesa, jeho vonkajším tiažovým poľom, ich zmenami s časom. Táto časť geodetických prác sa označuje ako teoretická geodézia. Ďalšou úlohou vyššej geodézie je vybudovať geodetické základy - základné polohové a výškové bodové pole. Vyššia geodézia zisťuje vzťahy medzi analyticky definovaným telesom (rotačným elipsoidom) a fyzikálne definovaným telesom (geoidom). Vyššia geodézia sa delí na geometrickú a fyzikálnu. Geometrická geodézia je tá časť vyššej geodézie, ktorá sa zaoberá riešením geodetických úloh bez uvažovania tiažového poľa na analytickej ploche (guľa, rotačný elipsoid). Fyzikálna geodézia je tá časť vyššej geodézie, ktorá skúma tiažové pole Zeme a jeho využitie v geodézii. (*V iných jazykoch napr. francúzštine, angličtine a nemčine sa nepoužíva prívlastok vyššia, ale jednoducho Géodésie, franc., Geodesy, angl., v nemčine Erdmessungs. Tomu, čo u nás nazývame nižšia alebo praktická geodézia, hovoria Francúzi Topométrie, Angličania Surveying, Nemci Landmessung*).

Základnou úlohou vyššej geodézie je určiť tvar reálnej Zeme a jej vonkajšieho tiažového poľa a jednoznačne stanoviť priestorovú polohu geodetických bodov na analyticky presne definovanej, pokiaľ možno čo najjednoduchšej ploche (guľa, elipsoid). Na túto plochu sa tieto body premietnu a určí sa poloha ich priemetu. Okrem toho sa určí vzdialenosť každého bodu nad touto plochou, teda jeho výška. V priemete na zvolenej ploche sa potom pomerne ľahko riešia ostatné geodetické úlohy. Z hľadiska presnosti je dôležité, aby sa plocha na ktorú sa premieta - tzv. referenčná plocha, sa čo najlepšie primykala ku skutočnému povrchu Zeme.

S vyššou geodéziou úzko súvisia: vyššia matematika, geodetická astronómia, matematická kartografia atď.).

1.1 Fyzikálna geodézia

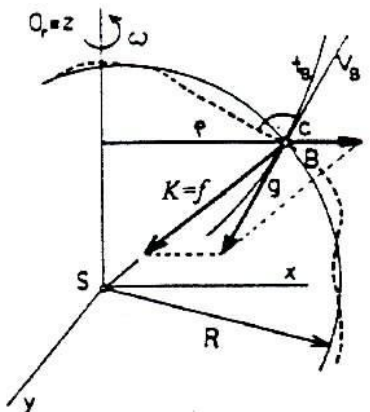
Fyzikálna geodézia je založená na znalosti tiažového poľa Zeme. Veda o tiažovom poli Zeme sa nazýva gravimetria. Má zásadný význam pre určenie tvaru a rozmeru Zeme.

Tiažové pole Zeme

Zemské teleso hmotnosti M vytvára nad svojím povrchom v zmysle Newtonovho zákona gravitačné pole. V každom bode priestoru v okolí Zeme, ako aj na povrchu pôsobí príťažlivá (gravitačná) sila \mathbf{f} - prejav gravitačného poľa a odstredivá sila \mathbf{c} - dôsledok otáčania Zeme okolo rotačnej osi O_r , (obr. 1.1). Rotáciou gravitačného poľa sa vytvára pole zemskej tiaže. Je to priestor v ktorom pôsobí sila zemskej tiaže, a ktorý charakterizuje tiažové zrýchlenie \mathbf{g} .

Gravitačné pole môže charakterizovať intenzita gravitačného poľa \mathbf{K} , ktorá charakterizuje pole z hľadiska jeho silového pôsobenia na hmotnostnú jednotku m . Táto zložka sa v každom bode poľa rovná gravitačnému zrýchleniu \mathbf{f} ($\mathbf{f} = \mathbf{K}$), ktoré gravitačné pole v tomto bode udeľuje telesám. Veľkosť intenzity gravitačného poľa guľovosymetrického telesa polomeru R (približný tvar Zeme) na jeho povrchu v bode B vyplýva z Newtonovho gravitačného zákona $\mathbf{K} = GMR^{-2}$, kde $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitačná konštanta a $M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnosť Zeme.

Veľkosť zložky zrýchlenia tiaže \mathbf{g} je podmienená rotáciou Zeme ($\mathbf{c} = \omega^2 \mathbf{r}$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania Zeme a \mathbf{r} je vzdialenosť bodu B od rotačnej osi Zeme).



Obr. 1.1. Sily v tiažovom poli Zeme

Tiažové zrýchlenie, alebo tiež intenzitu tiažového poľa Zeme \mathbf{g} tvorí vektorový súčet zložky vektora gravitačného zrýchlenia \mathbf{f} a vektora odstrediveho zrýchlenia \mathbf{c} (obr.1.1)

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{c}. \quad (1.1)$$

Ak sa silové pole znázorní siločiarami, potom je smer vektora \mathbf{g} - smer intenzity tiažového poľa v bode B , totožný so smerom dotýčnice k siločiare t_B v bode B . Siločiara je čiara, v smere ktorej pôsobí tiaž. Smeruje do stredu otáčania Zeme. Dotýčnica V_B sa nazýva aj vertikálou v bode B .

Gravitačné pole, pole odstredivej sily a tiažové pole možno charakterizovať aj potenciálmi príslušných polí V , P a W , ktoré zvyrazňujú energetické vlastnosti polí. (Potenciál je energia patriaca polohe danej sústavy.) Platí

$$W = V + P, \quad (1.2)$$

kde V je gravitačný potenciál, P odstredivý potenciál a W tiažový potenciál. Keď sa bude neustále uvažovať kolmý smer na smer tiažového zrýchlenia, pre skutočný tiažový potenciál potom všeobecne platí (potenciál tiažového zrýchlenia)

$$W = C \text{ (konštanta)}. \quad (1.3)$$

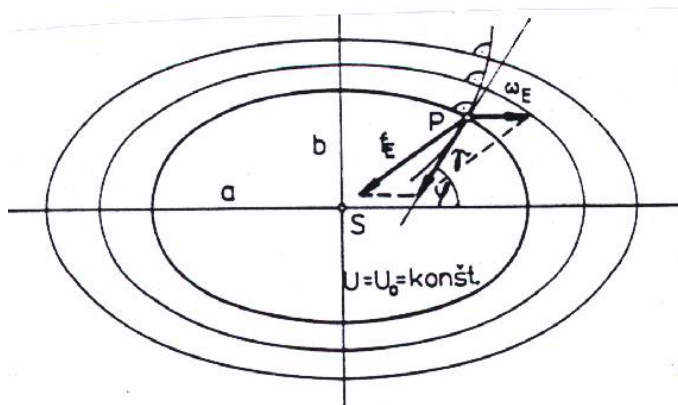
Zmenou hodnoty C dostaneme inú hladinovú plochu W_1 , W_2 , ... v ľubovoľnej výške vo vzťahu k hladine mora. Pre dve nekonečne blízke hladinové plochy platí tzv. Brunsov teorém $dW = -g dh$. Ak dh je ortogonálna vzdialenosť hladinových plôch (vzdialenosť po tiažnici), potom s narastajúcou výškou dh sa znižuje veľkosť tiažového zrýchlenia g a naopak.

Rovnica (1.3) vyjadruje plochy, z ktorých každá má v ľubovoľnom bode rovnakú hodnotu potenciálu. Plochy sa nazývajú ekvipotenciálnymi, geopotenciálnymi alebo hladinovými plochami tiaže. Z rovnice tiež vyplýva, že každá ekvipotenciálna plocha je v každom svojom bode kolmá na príslušný smer zemskej tiaže. Siločiarly tiažového poľa teda vytvárajú vzhľadom na hladinové plochy systém ortogonálnych trajektórií (dve navzájom kolmé osnovy čiar definované na určitej ploche). V dôsledku nehomogenity Zeme budú siločiarly tiažového poľa v jednotlivých bodoch povrchu Zeme, v závislosti na rozložení látok rôznej hustoty a objemu meniť svoj priebeh. Keďže hladinové plochy sú kolmé k siločiarly tiažového poľa, priebeh hladinových plôch bude nepravidelný (obr.1.2).

7

Normálne tiažové pole. Pri určovaní vonkajšieho tiažového poľa Zeme, t.j. tiažového poľa na a nad zemským povrchom, sa ako jeho aproximácia používa normálne tiažové pole. Je vytvorené telesom - tzv. normálnou Zemou - ktoré má maximálne verne zobrazovať skutočný tvar Zeme a čo najlepšie nahradzovať jeho skutočné tiažové pole. Z geometrického hľadiska sa za takéto teleso prijíma rotačný elipsoid, ktorému okrem geometrických parametrov (veľkej poloosi a a sploštenia $i = (a - b) a^{-1}$ sa prisudzujú aj fyzikálne parametre Zeme (hmotnosť M_E a uhlová rýchlosť rotácie ω_E). Normálne tiažové pole normálneho tvaru Zeme sa potom vytvára gravitačnými a rotačnými účinkami elipsoidu, pričom povrch telesa (normálnej Zeme) má charakter hladinovej plochy. Takýto elipsoid sa nazýva hladinový alebo normálny elipsoid a je aproximáciou geoidu. Možno definovať rôzne hladinové elipsoidy, ten elipsoid, ktorého parametre najlepšie zodpovedajú reálnej Zemi sa nazýva stredný zemský elipsoid. Potenciál normálnej tiaže označujeme U .

Normálne tiažové pole hladinového elipsoidu charakterizuje normálne tiažové zrýchlenie g , (obr.1.4). Je to priemet intenzity gravitačného poľa normálnej Zeme f_E do smeru normály k povrchu hladinového elipsoidu na tomto elipsoide.



Obr. 1.4. Normálne hladinové plochy a normálne tiažové zrýchlenie

V súčasnosti pre strednú hodnotu g_0 normálneho tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme platí konvenčná hodnota $9,80665 \text{ m.s}^{-2}$.

1.1.1 Tvar Zeme a jeho aproximácie

V súčasnosti sa za geometrický tvar Zeme pokladá jednak geoid - hladinová plocha s tiažovým potenciálom W_0 prechádzajúca nulovým výškovým bodom, jednak nehladinová plocha kvázigeoid. Pri určovaní geoidu sa prijíma rad hypotéz, pretože nie je dostatočne známe rozloženie látok nad geoidom a skutočné tiažové pole medzi geoidom a fyzickým povrchom Zeme. Tvar geoidu sa stále spresňuje. Kvázigeoid je aproximácia tvaru Zeme určená výlučne na základe vykonaných geodetických, astronomických a gravimetrických meraní. Plochy geoidu a kvázigeoidu sú si navzájom blízke. Najväčšie rozdiely dosahujú v oblasti pevnín sú približne 2 m. V oblasti oceánov majú obidve plochy totožný priebeh.

Určenie plochy kvázigeoidu, ale aj jeho definície, si vysvetlíme nasledovnou úvahou. V bode B na fyzickom povrchu Zeme (obr. 1.5) označíme potenciál skutočného tiažového poľa hodnotou W_B a potenciál normálneho tiažového poľa hodnotou U_B . Pritom potenciál normálneho tiažového poľa U_B závisí od zemepisnej šírky a od výšky h nad hladinovým elipsoidom

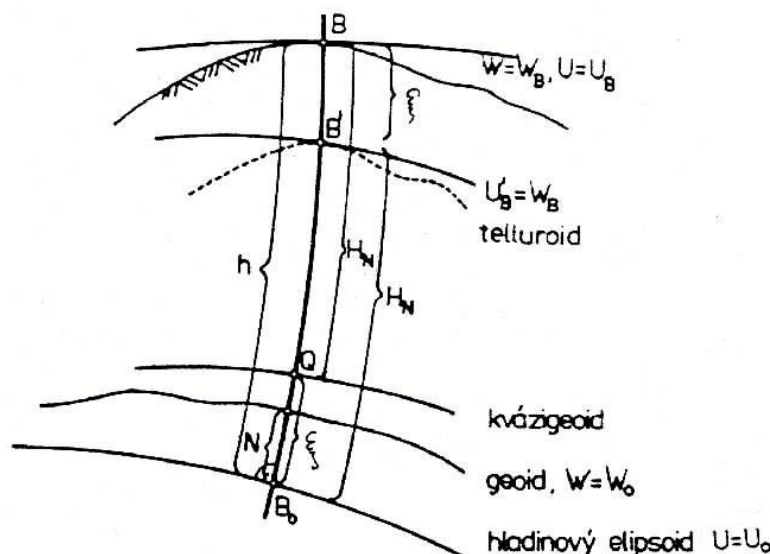
$$U_B = U(j, h). \quad (1.4)$$

Hladinový elipsoid, vzt'aznú nulovú plochu U_0 normálneho tiažového poľa Zeme, zvolíme tak aby

$$U_0 = W_0 = \text{konšt.} \quad (1.5)$$

Rozdiely skutočných a normálnych potenciálov medzi hladinovými plochami v bode B a príslušnými nulovými plochami sú vo všeobecnosti rôzne, teda

$$W_B - W_0 \neq U_B - U_0 = U(j, h) - U_0. \quad (1.6)$$



Obr. 1.5. Hladinové a referenčné plochy

Na siločiare t_B prechádzajúcej bodom B je možné určiť takú výšku H_N , s ktorou sa potenciálny rozdiel $U(j, h) - U_0$ bude rovnať rozdielu $W_B - W_0$, teda

$$W_B - W_0 = U(j, h) - U_0 \quad (1.7)$$

Výška H_N na siločiare t_B určuje bod B' , v ktorom vzhľadom na rovnicu (1.5) bude podľa (1.7) platiť

$$W_B = U(j, h) = U'_B \quad (1.8)$$

teda normálny potenciál U'_B sa v bode B' bude rovnať skutočnému potenciálu W_B v bode B .

Výška H_N sa nazýva normálna výška bodu B . Je to výška bodu B' nad hladinovým elipsoidom. Ak sa táto výška nanesie z bodu B z fyzického povrchu Zeme na siločiaru t_B smerom do vnútra Zeme, koncový bod Q spolu s množinou podobne získaných bodov determinuje plochu, ktorá sa nazýva kvázigeoid (normálna výška je vzdialenosť bodu na fyzickom povrchu Zeme od kvázigeoidu meraná pozdĺž siločiar). Veličina x je výška kvázigeoidu nad hladinovým elipsoidom. N predstavuje výšku geoidu nad elipsoidom (výšková anomália).

Kvázigeoid je teda nehladinová plocha, ktorá od zemského fyzického povrchu prebieha vo vzdialenostiach H_N , ležiacich na siločiarach normálneho tiažového poľa. Je určená tak, aby sa rozdiely potenciálov skutočných W a normálnych U v bode B a príslušnými nulovými plochami rovnali. Telluroid sa nazýva taká nehladinová plocha, pre body ktorej platí $W_B = U'_B$ (skutočný potenciál sa rovná normálnemu potenciálu). Kvázigeoid sa teda určuje bez hypotéz o rozložení látok vo vnútri geoidu.

1.1.2 Tiažové anomálie a odchýlky siločiar tiažového poľa (tiažnicové odchýlky)

Pri meraní v bode B na fyzickom povrchu Zeme sa meria tiažové zrýchlenie g v skutočnom poli zemskej tiaže. Pri meraní v bode B_0 na povrchu hladinového elipsoidu by sa meralo zrýchlenie g_0 . Ak prepočítame vhodnými korekciami hodnotu g na redukovanú hodnotu g_0 , rozdiel na povrchu hladinového elipsoidu

$$Dg = g_0 - g \quad (1.9)$$

bude anomáliou tiažového poľa Zeme v bode B_0 , ktorá vyjadruje poruchy skutočného tiažového poľa Zeme vzhľadom k normálnemu tiažovému poľu. Zapríčiňuje to hustotná nehomogenita látok a ich rozloženie v okolí merania. V ľubovoľnom bode povrchu Zeme príslušná normála a siločiar tiažového poľa nie sú totožné. Zvierajú medzi sebou malý uhol Q , ktorý sa nazýva relatívna (astronomicko-geodetická) odchýlka siločiar tiažového poľa (tiažnicová odchýlka). Z uvedeného dôvodu nebudú totožné ani geodetické a astronomické zemepisné súradnice bodu, a tiež ani geodetický a astronomický azimut určitej zámery (kap. 1.3.1 geodetické zemepisné súradnice, kap. 1.4 astronomické súradnice).

1.2 Meranie tiažového zrýchlenia

Zmena potenciálov medzi dvoma hladinovými plochami je daná vzťahom $dW = -g dh$, ktorý použijeme na určenie geopotenciálnej kóty.

Vo vzťahu je dôležité poznať g – tiažové zrýchlenie.

Každý fyzikálny jav, v ktorého zákonitosti vystupuje tiažové zrýchlenie, umožňuje určiť číselnú hodnotu tiažového zrýchlenia výpočtom z rovnice $s = \frac{1}{2}gt^2$ vyjadrujúcej túto zákonitosť a obsahujúcej iné, pomerne ľahšie a priamo merané údaje.

Metódy určenia tiažového zrýchlenia fyzikálnych javov môžeme zatriediť do skupiny **dynamických** metód alebo do skupiny **statických** metód.

Pozorovanie doby kyvu kyvadla alebo voľného pádu patrí do skupiny dynamických metód. Porovnanie tiažovej sily s pružnou silou telesa vhodnej hmotnosti patrí do skupiny statických metód.

Meranie tiažového zrýchlenia vo zvolenom bode, ktoré sa vykonáva nezávisle od meraní na iných bodoch je **absolútne meranie**. Naproti tomu meranie rozdielu tiažového zrýchlenia dvoch bodov, z ktorých tiažové zrýchlenie na jednom z nich je známe, je **relatívne meranie**.

Absolútne meranie tiažového zrýchlenia vyžaduje mimoriadnu starostlivosť a priaznivé podmienky. Preto sa koná iba na ojedinelých miestach zemského povrchu. Tiažové zrýchlenie na ostatných volených bodoch sa odvodí metódou relatívneho merania.

1.2.1 Absolútne meranie tiažového zrýchlenia

V súčasnej dobe sa na absolútne meranie tiažového zrýchlenia používajú absolútne balistické gravimetre, ktoré určujú tiažové zrýchlenie z merania času na meranej dĺžke pohybujúceho sa telesa vo vákuu. Na meranie dĺžky úseku sa používa laserový interferometer a na meranie času rubídiový atomový oscilátor. Prvé prístroje tohto druhu vznikli okolo roku 1960. Stále sa zdokonaľujú a dnes dosahujú presnosť niekoľko desiatok nms^{-2} . Meranie sa vykonáva v laboratórnom prostredí v dlhšom časovom úseku napr. 24 h. Prístroje majú veľkú hmotnosť ale sa dajú transportovať.

U absolútnych balistických gravimetrov existujú dva spôsoby tiažového zrýchlenia. Symetrický spôsob je založený na zvislom vrhu nahor a následnom voľnom páde telesa a nesymetrický spôsob, ktorý využíva voľný pád pozorovaného objektu.

1.2.1.1 Určenie tiažového zrýchlenia z pozorovania voľného pádu

Dráhu s vykonanú za dobu t voľne padajúcim telesom vo vákuu vyjadruje vzťah

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (1.10)$$

v ktorom sa vyskytuje tiažové zrýchlenie g pre zvolené miesto zemského povrchu.

V pokusoch sa používa homogénna, kovová alebo sklenená guľa. Za predpokladu, že teleso padá vo vzduchoprázdnom priestore a z výšky menšej ako 10 m, použije sa vzťah

$$s = \frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t, \quad (1.11)$$

kde g_0 je tiažové zrýchlenie.

Telesu udelíme začiatočnú rýchlosť v_0 . Padajúce teleso vykoná za dobu t_i dráhy s_i . Dostaneme rovnice

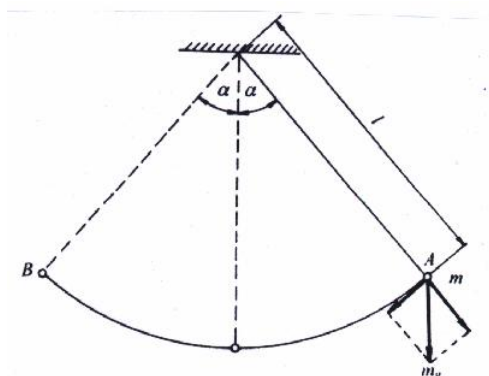
$$s_i = \frac{1}{2} g_0 t_i^2 + v_0 t_i,$$

ktorých riešením odvodíme tiažové zrýchlenie g_0 vo zvolenom mieste zemského povrchu, ako aj udelenú začiatočnú rýchlosť v_0 .

1.2.1.2 Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

Kyvadlové prístroje umožňujú dosiaľ najpresnejšie absolútne merania tiažového zrýchlenia. Kým o nich budeme hovoriť, je potrebné sa aspoň krátko zmieniť o matematickom a fyzickom kyvadle.

Matematické kyvadlo je hmotný bod hmotnosti m zavesený na bezváhovej (so zanedbateľnou hmotnosťou proti hmotnosti m) pevnej neroztiahnutej niti dĺžky l . Najväčšia zvolená výchylka z rovnovážnej polohy kyvadla je amplitúda a (obr. 1.6).



Obr. 1.6. Matematické kyvadlo

Čas potrebný na vykonanie dráhy po časti oblúka kružnice (z krajnej polohy A do krajnej polohy B), teda z jednej najväčšej amplitúdy (pravej) po druhú (ľavú), t.j. čas, ktorý uplynie medzi dvoma po sebe idúcimi prechodmi hmotného bodu rovnovážnou polohou, je doba t , čiže polovica kmitu. Vo vzduchoprázdnom priestore je doba kyvu t zvolenej amplitúdy a daná vzorcom (Huyghensov vzťah)

$$t = p \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right) \quad (1.12)$$

Zo vzorca vidíme, že doba kyvu t nezávisí od hmotnosti m .

S ohľadom na také malé amplitúdy môžeme rovnicu (1.12) po vynechaní tretieho a, prirodzene i ďalších (neuvedených) členov písať v tvare

$$t = p \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{16} \right) \quad (1.13)$$

Pre nekonečne malú amplitúdu a je doba kyvu matematického kyvadla daná vzťahom

$$t = p \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.14)$$

nezávisí už ani od amplitúdy.

Tiažové zrýchlenie g vo zvolenom bode zemského povrchu môžeme určiť z rovnice

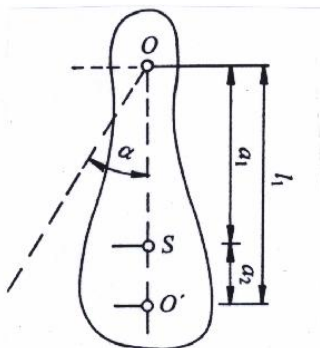
$$g = \frac{p^2 l}{t^2} \quad (1.15)$$

za predpokladu, že dĺžka l je známa a t meriame.

Musíme zistiť vyžadovanú presnosť určenia l a doby kyvu t .

Matematické kyvadlo je vlastne fiktívne a nie je možné ho realizovať. V praxi sa pracuje s kyvadlom fyzickým, vo všeobecnosti je to každé teleso aj náhodného tvaru, ktoré kýva bez trenia okolo vodorovnej osi v bode O , teda neprechádzajúcej jeho ťažiskom S .

Na predĺženej spojnici \overline{OS} (obr. 1.7) skusmo vyhľadáme také miesto O' pre novú os rovnobežnú s osou prechádzajúcou bodom O , aby doba kyvu okolo tejto novej osi s dobou okolo pôvodnej osi bola rovnaká. Meraním doby kyvu t_1 a t_2 v oboch polohách (O, O') reverzného kyvadla určíme dobu kyvu $t = t_1 + \Delta t$, ktorú potrebujeme poznať na relatívne meranie tiažového zrýchlenia.



Obr. 1.7. Reverzné kyvadlo

1.2.2 Relatívne meranie tiažového zrýchlenia

Na štúdium zemského telesa, ako aj pre geodetické účely je potrebné poznať tiažové zrýchlenie na rozličných bodoch celého zemského povrchu. Videli sme, že absolútne merania tiažového zrýchlenia vyžadujú špeciálne podmienky, veľmi zdĺhavé a starostlivé merania, účelne zariadenú miestnosť so stálou teplotou a možnosťou pozorovať kyvy kyvadla v priestore s nízkym tlakom vzduchu. Treba zisťovať množstvo korekcií, čo vyžaduje mnoho času. Preto opísaný spôsob absolútneho merania tiažového zrýchlenia nie je možné aplikovať na zvolených miestach kdekoľvek v teréne.

Bola teda vypracovaná taká metóda na určenie tiažového zrýchlenia na zvolených bodoch v prírode, pri ktorej veľmi starostlivé určenie dĺžky kyvadla a niekoľkých korekcií odpadá.

Invariabilita kyvadla, tj. nemennosť dĺžky kyvadla počas merania a prenosu na druhý bod sa kontroluje tým, že sa používajú tri až štyri kyvadlá rôznej alebo rovnakej doby kyvu. Zistená zmena doby kyvu (jedného kyvadla na niektorom bode oproti dobám kyvu ostatných kyvadiel) upozorňuje na zmenu dĺžky kyvadla. Tieto kyvadlá nie sú zväčša reverzné. Sú polsekundové, dlhé 25 cm.

Spôsob odvodenia tiažového zrýchlenia na zvolenej stanici sa opiera o tzv. **základný bod**, na ktorom sa tiažové zrýchlenie určilo absolútnym meraním. Teda tiažové zrýchlenie g_0 v tomto bode je známe. Určovanie tiažových zrýchlení na zvolených bodoch sa začne na spomenutom základnom bode, na ktorom sa určí doba kyvu t_0 kyvadla poľnej kyvadlovej súpravy. Potom sa kyvadlová súprava prenáša na zvolené body, na ktorých sa určí doba kyvu t . Meranie sa končí na základnom bode. Súhlas dôb kyvu t_0 na začiatku merania a na konci merania potvrdzuje invariabilitu kyvadla. Z meraných dôb kyvu t a doby kyvu t_0 sa na základnom bode odvodí zmena Δg tiažového zrýchlenia na zvolených bodoch, ako aj tiažové zrýchlenia g na týchto bodoch. Touto cestou odvodené tiažové zrýchlenia charakterizujú **relatívnu metódu** merania tiažového zrýchlenia. Pre základný bod so známou hodnotou tiažového zrýchlenia g_0 a meranou dobou kyvu t_0 platí vzťah

$$g_0 = \frac{p^2}{t_0^2} l \quad (1.16)$$

a pre zvolenú stanicu, na ktorej sa merala doba kyvu t , platí vzťah

$$g = \frac{p^2}{t^2} l. \quad (1.17)$$

Z oboch týchto rovníc na určenie tiažového zrýchlenia g vyplýva vzťah

$$g = g_0 \frac{t_0^2}{t^2}. \quad (1.18)$$

Ak vzájomné vzdialenosti zvolených bodov nie sú príliš veľké, vzťah (1.18) sa podstatne zjednoduší úpravou

$$g = g_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}. \quad (1.19)$$

K zlomku v okrúhlej zátvorke pripočítame a odpočítame 1 a po menšej úprave dostaneme

$$g = g_0 \left(\frac{t}{t_0} + 1 - 1 \right)^{-2} = g_0 \left(1 + \frac{t - t_0}{t_0} \right)^{-2} \quad (1.20)$$

Vzťah (1.20) rozvineme do radu podľa vzťahu

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots \quad (1.21)$$

$$g = g_0 \left(1 + \frac{t - t_0}{t_0} \right)^{-2} = g_0 \left[1 - 2 \frac{t - t_0}{t_0} + 3 \left(\frac{t - t_0}{t_0} \right)^2 - \dots \right]. \quad (1.22)$$

Pretože pre pomerne blízke zvolené body je rozdiel $t - t_0 = \Delta t$ malý, na dané účely úplne vyhovuje, ak z radu (1.22) použijeme len prvé dva členy.

$$g - g_0 = \Delta g = -2g_0 \frac{\Delta t}{t_0}. \quad (1.23)$$

V tejto rovnici $-\frac{2g_0}{t_0} = K$ (konštanta) a na stanici určený rozdiel tiažového zrýchlenia

$$\Delta g = K \Delta t \quad (1.24)$$

sa odvodí veľmi jednoducho násobením rozdielu dôb kyvu zistených na základnom bode a na stanici s konštantou K .

Algebraickým pripočítaním tiažového rozdielu Δg k tiažovému zrýchleniu základného bodu sa odvodí tiažové zrýchlenie na zvolenej stanici

$$g = g_0 + \Delta g \quad (1.25)$$

Relatívne určenie tiažového zrýchlenia predpokladá, aby sme na jednom bode mali tiažové zrýchlenie veľmi starostlivo určené absolútnym meraním. Na konci minulého a na začiatku nášho storočia (v rokoch 1898 – 1904) takéto meranie vykonali Kühnen a v Postupime na Geodetickom ústave v bode so súradnicami $j = 52^\circ 22,9'$ $l = 13^\circ 04,1'$ východne od Greenwicha s nadmorskou výškou $h = 87$ m. Pre tento bod určili tiažové zrýchlenie

$$g = 981,247 \pm 0,003 \text{ cm s}^{-2}. \quad (1.26)$$

Tento bod dosiahol medzinárodný význam a stal sa základným tiažovým bodom tzv. postupimskej svetovej tiažovej sústavy.

U nás tiažový bod zvolil v roku 1926 prof. B. Kladivo v suteréne budovy Českej techniky v Brne a v postupimskej tiažovej sústave relatívnou metódou Fechnerovým štvorkyvadlovým prístrojom odvodil jeho tiažové zrýchlenie, ktorého hodnota je

$$g = 980,961,1 \pm 0,93 \text{ mgal.} \quad (1.27)$$

1.3 Geometrická geodézia

Na zložitej a nepravidelnej ploche geoidu alebo kvázigeoidu nie možné v praxi riešiť geodetické úlohy, alebo na ne zobrazit' väčšie časti zemského povrchu, pretože tieto plochy nie je možné analyticky jednoducho vyjadriť. Aproximáciami geoidu, resp. kvázigeoidu na výpočtové a zobrazovacie práce sú rôzne definované elipsoidy, guľové plochy a roviny.

1.3.1 Referenčný elipsoid

Parametre zemského elipsoidu sa určujú z tzv. stupňových meraní. Z rôzne rozsiahlych a stále presnejších stupňových meraní boli postupne určené parametre viacerých rotačných zemských elipsoidov. Plochu geoidu by najlepšie approximoval trojosový zemský elipsoid. Geometria trojosového elipsoidu je však tak zložitá, že v geodetickej praxi sa zásadne používajú rotačné elipsoidy. Ak je určitý zemský elipsoid zvolený pre geodetický systém, nazýva sa referenčný elipsoid.

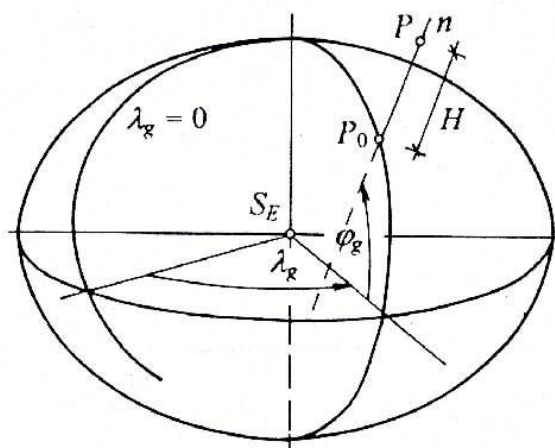
Z hladinových elipsoidov sa ako optimálna aproximácia geoidu prijíma stredný zemský elipsoid. K tomuto optimálnemu modelu Zeme sa približovali rôzne referenčné elipsoidy napr. Besselov (1841), Krasovského (1940). Oba tieto elipsoidy tvoria základ kartografického zobrazenia a polohového súradnicového systému v bývalom Československu a teraz na Slovensku. V súčasnosti stredný zemský elipsoid najlepšie approximuje referenčný elipsoid IAG 1980, prijatý na 17. valnom zhromaždení Medzinárodnej geodetickej a geofyzikálnej únie. Označuje Európsky terestrický referenčný systém 1989 (ETRS 89). Je definovaný takto:

- dĺžka veľkej poloosi ekvipotenciálneho elipsoidu $a = 6\,378\,137 \pm 2 \text{ m}$, $b = 6\,356\,877 \text{ m}$,
- geocentrická gravitačná konštanta $GM = (3\,986\,005 \pm 0,5)10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$,
- dynamické sploštenie (zonálny geopotenciálny koeficient druhého stupňa) $J_2 = (1082,63 \pm 0,005)10^{-6}$,
- uhlová rýchlosť rotácie Zeme $w = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$.

Rovnakými parametrami je definovaný Svetový geodetický systém WGS 84.

Vo všeobecnosti každý rotačný zemský (referenčný) elipsoid je jednoznačne definovaný dvoma parametrami meridiánovej elipsy (veľkou poloosou a a malou poloosou b , resp. poloosou a a sploštením elipsoidu i).

Besselov elipsoid má parametre $a = 6\,377\,397,15508 \text{ m}$ a $i = 1 : 299,152\,812\,853$.



Obr. 1.8. Geodetické elipsoidické súradnice

1.3.2 Systém geodetických zeměpisných súradníc

Súradnicovým systémom na rotačných referenčných elipsoidoch sú geodetické elipsoidické zemepisné súradnice

$$S_E(\varphi_g, \lambda_g, H), (\text{obr.1.8})$$

kde S_E je stred elipsoidu,

φ_g je geodetická zemepisná šírka,

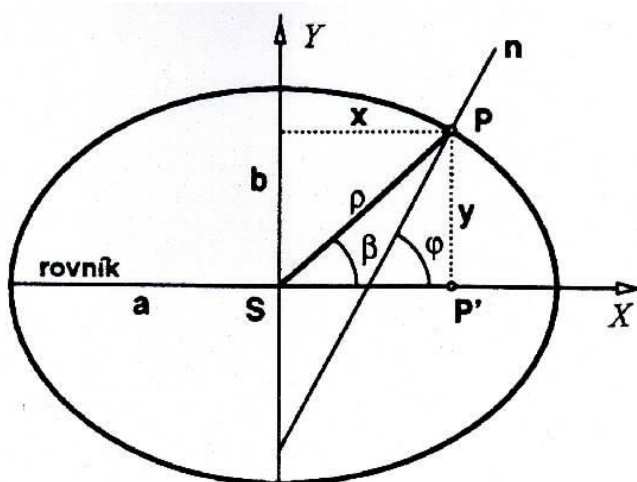
λ_g je geodetická zeměpisná délka,

H je elipsoidická (geodetická) výška.

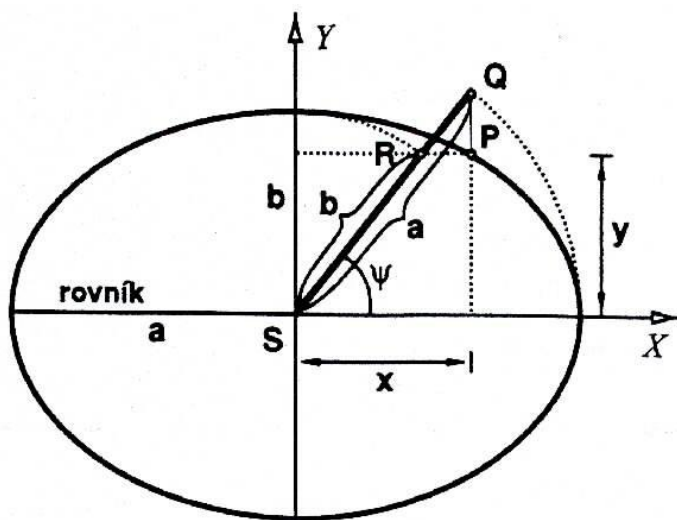
Za nultý poludník je zvolený ten, ktorý prechádza daným bodom astronómického observatória v Greenwichi.

Geocentrická šířka b

Pri riešení niektorých úloh v matematickej kartografii sa namiesto šírky j bodu P zavádza geocentrická šírka b . Je to uhol, ktorý zvierajú spojnice bodu P so stredom elipsoidu (rádius – vektor r , obr. 1.9). Druhou súradnicou zostáva geodetická dĺžka l .



Obr. 1.9. Pravoúhlé súradnice x, y a geocentrická šírka b



Obr. 1.10. Redukovaná šířka y

Redukovaná šírka y

V niektorých teoretických odvodeníach sa používa redukovaná šírka y . Bodom $P(j)$ vedme rovnobežku s osami X, Y . Oblúk kružnice s polomerom a , opísaný zo stredu S meridiánovej elipsy, pretne rovnobežku s osou Y v bode Q . Uhol, ktorý zvierá spojnica \overline{QS} s rovinou rovníka (na obr. 1.10 s veľkou poloosou meridiánovej elipsy), je redukovaná šírka y . Druhou súradnicou ostáva geodetická dĺžka I .

$$x = a \cos y, \quad y = b \cos(100 - y) = b \sin y. \quad (1.28)$$

1.3.3 Priestorové pravouhlé súradnice X, Y, Z

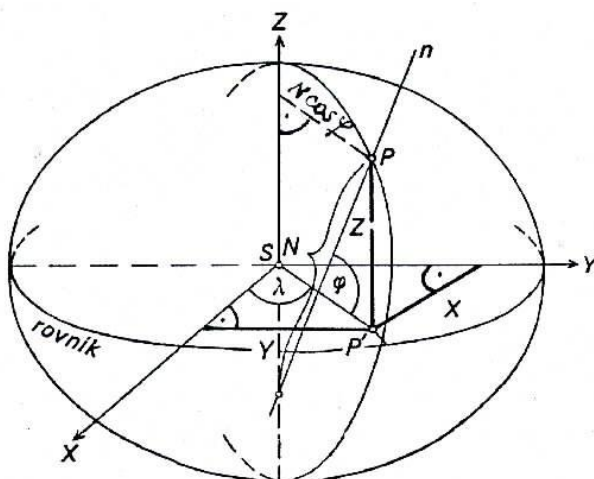
Riešenie geodetických úloh v priestorových pravouhlých súradniciach má veľmi dôležitú úlohu v družicovej geodézii pri vyjadrovaní priestorovej polohy bodov vo svetovom súradnicovom systéme (WGS 84).

Počiatok súradnicového systému je v strede elipsoidu. Os Z je totožná s osou rotácie. Os X je priesečnicou roviny rovníka s rovinou nultého poludníka, os Y je v rovine rovníka kolmá na os X (obr. 1.11).

Priestorové súradnice bodu P sú dané vzťahmi

$$X = N \cos j \cos I, \quad Y = N \cos j \sin I, \quad Z = y = N(1 - e^2) \sin j, \quad (1.29)$$

kde N je priečný polomer krivosti v bode P . Rovnice (1.29) sú odvodené v kap. 1.3.7.



Obr. 1.11. Priestorové súradnice X, Y, Z

1.3.4 Elipsa

Elipsa je množina bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov nazývanými ohniskami F_1 a F_2 je konštantný.

Označme $2c$ vzdialenosť medzi ohniskami F_1 a F_2 (obr. 1.12). Súradnice ohnísk elipsy budú $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

$M(x, y)$ je ľubovoľným bodom elipsy. Potom pre vzdialenosť r_1 a r_2 bodu $M(x, y)$ od bodov $F_1(-c, 0)$ a $F_2(c, 0)$ je

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad (1.30)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

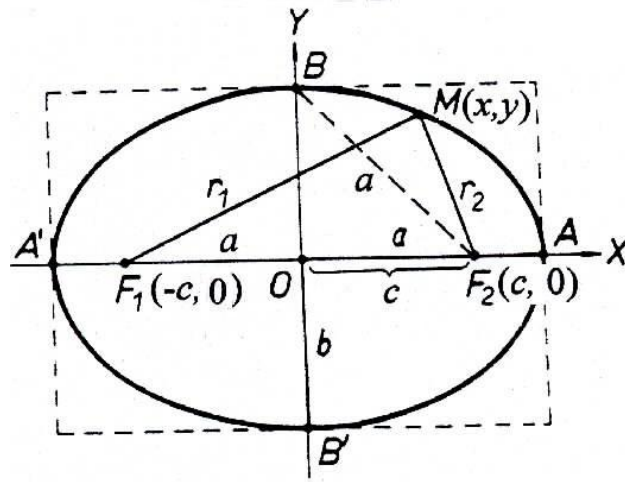
Súčet týchto vzdialeností musí byť konštantný, označíme ho $2a$

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1.31)$$

Ak násobíme rovnicu (1.31) rozdielom $r_1 - r_2$, dostaneme

$$r_1^2 - r_2^2 = 2a(r_1 - r_2) \text{ a z toho dostávame}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2a}. \quad (1.32)$$



Obr. 1.12. Elipsa

Ak do čitateľa pravej strany rovnice (1.32) namiesto r_1 a r_2 dosadíme hodnoty (1.30), dostaneme

$$r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - ((x-c)^2 + y^2) = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 4xc \quad (1.33)$$

Rovnica (1.32) po úprave bude

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a}. \quad (1.34)$$

Z rovnice (1.32) a (1.34) po ich spočítaní a odčítaní dostaneme

$$\begin{aligned} 2r_1 &= \frac{2cx}{a} + 2a, & 2r_2 &= 2a - \frac{2cx}{a}, \\ r_1 &= a + \frac{cx}{a}, & r_2 &= a - \frac{cx}{a}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ak teraz do prvej rovnice (1.35) dosadíme namiesto r_1 jeho hodnotu z rovnice (1.30), dostaneme

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a}.$$

Umocnením a zlúčením dostaneme

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}, \\ a^2 x^2 + 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 - a^4 - 2a^2 cx - c^2 x^2 &= 0, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pretože z definície elipsy $r_1 + r_2 > F_1 F_2 = 2c$ platí $2a > 2c$, môžeme položiť

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Rovnica (1.36) nadobudne tvar

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Keď rovnicu predelíme výrazom $a^2 b^2$ dostaneme rovnicu elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.37)$$

Ak v rovnici elipsy (1.37) položíme $b = a$, dostaneme rovnicu kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (1.38)$$

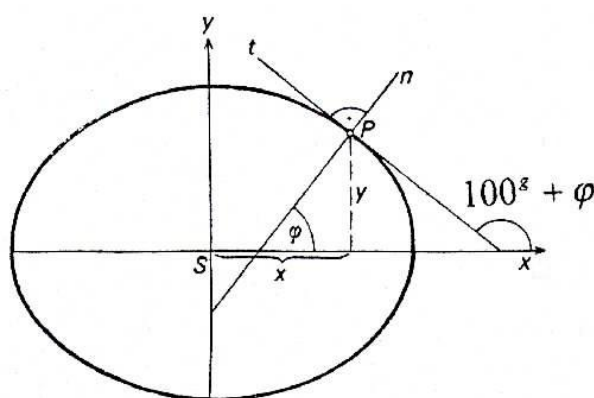
ktorá je zvláštnym prípadom elipsy.

1.3.5 Vzťah medzi geodetickou šírkou j_g ($\circ j$) bodu P a jeho pravouhlými súradnicami v rovine meridiánovej elipsy

Bodom P na elipsoide prechádza poludník (meridián) o zemepisnej dĺžke l . Je to elipsa s poloosami a, b , ktorú nazývame meridiánová elipsa. Ak zvolíme začiatok pravouhlého rovinového súradnicového systému v strede S meridiánovej elipsy, veľkú poloos za os X , malú za os Y , bude rovnica tejto elipsy (1.37), (obr.1.13)

Uhol, ktorý zvierá normála n k elipse v tomto bode s veľkou poloosou X , je geodetická šírka j bodu P . (Pre jednoduchosť budeme používať označenie j , nie j_g , pretože nie je potrebné rozlišovať medzi geodetickou šírkou j_g a astronomickou šírkou j_a . Dotyčnica t v bode P zvierá s osou X uhol $100^g + j$. Jej smernica je daná vzťahom

$$k = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(100^g + j) = -\operatorname{cotg} j. \quad (1.39)$$



Obr. 1.13. Pravouhlé súradnice v rovine meridiánovej elipsy

Derivovaním rovnice elipsy (1.37) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Z rovníc (1.39) a (1.40) vyplýva

$$\cotg j = \frac{b^2 x}{a^2 y} . \quad (1.41)$$

Táto rovnica vyjadruje geodetickú šírku j ako funkciu pravouhlých súradníc x , y v rovine meridiánovej elipsy. Dosadíme do rovnice (1.41)

$$\cotg j = \frac{\cos j}{\sin j} ,$$

rovniciu umocnime na druhú a upravíme

$$\frac{\cos^2 j}{\sin^2 j} = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} ,$$

$$a^4 y^2 \cos^2 j - b^4 x^2 \sin^2 j = 0. \quad (1.42)$$

Ďalej využijeme upravenú rovniciu meridiánovej elipsy (1.37)

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (1.43)$$

Riešme tieto dve rovnice. Z rovnice (1.43) vyjadríme x^2 a dosadíme do rovnice (1.42) a vypočítame súradnicu y

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2} ,$$

$$a^4 y^2 \cos^2 j - b^4 \left(\frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2} \right) \sin^2 j = 0,$$

$$a^2 y^2 \cos^2 j - b^4 \sin^2 j + b^2 y^2 \sin^2 j = 0,$$

$$y^2 (a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j) - b^4 \sin^2 j = 0,$$

$$y = \frac{b^2 \sin j}{\sqrt{a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j}} . \quad (1.44)$$

Podobne odvodíme

$$x = \frac{a^2 \cos j}{\sqrt{a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j}} . \quad (1.45)$$

Okrem sploštenia $i = (a - b) a^{-1}$ je ďalším parametrom charakterizujúcim rotačný elipsoid tzv. prvá excentricita

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} . \quad (1.46)$$

Vzťah (1.46) môžeme upraviť na tvar

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \Rightarrow b = a \sqrt{1 - e^2} , \quad a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.47)$$

a dosadiť do rovníc (1.44) a (1.45). Postup úpravy menovateľa v rovniciach (1.44) a (1.45):

$$(a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j) = a^2 [\cos^2 j + (1 - e^2) \sin^2 j] = a^2 [(\cos^2 j + \sin^2 j) - e^2 \sin^2 j] = a^2 (1 - e^2 \sin^2 j).$$

Spolu s úpravou čitateľa potom bude

$$y = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin j}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \sin^2 j)}} = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}} = \frac{b\sqrt{1 - e^2} \sin j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}}, \quad (1.48)$$

$$x = \frac{a^2 \cos j}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \sin^2 j)}} = \frac{a \cos j}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}}. \quad (1.49)$$

Keď označíme $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}$, rovnice (1.48) a (1.49) zapíšeme

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{W} \quad \text{a} \quad x = \frac{a \cos j}{W}. \quad (1.50)$$

Rovnice (1.44), (1.45), (1.48) a (1.49) sú parametrické rovnice meridiánovej elipsy. Parametrami sú zemepisná šírka j , obe poloosi a, b a prvá excentricita e^2 .

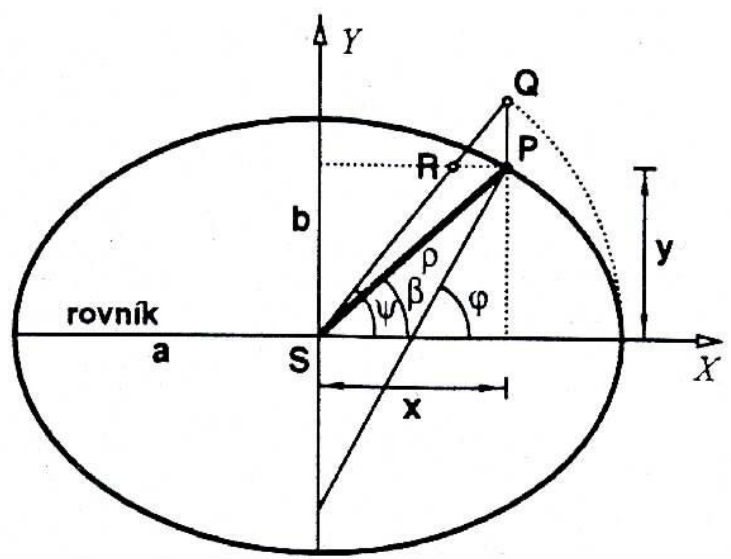
Vzťah medzi geocentrickou šírkou b a geodetickou šírkou j

Podľa obr. 1.14

$$\operatorname{tg} b = \frac{y}{x} = \frac{a(1 - e^2) \sin j}{a \cos j} = (1 - e^2) \operatorname{tg} j. \quad (1.51)$$

Geocentrický polomer (rádus – vektor) po dosadení za x a y (1.49) (1.48) bude

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{\frac{a^2}{W^2} [\cos^2 j + (1 - e^2)^2 \sin^2 j]} = \frac{a}{W} \sqrt{\cos^2 j + (1 - 2e^2 + e^4) \sin^2 j} = \\ &= \frac{a}{W} \sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 j}. \end{aligned} \quad (1.52)$$



Obr. 1.14 Geocentrická šírka b a redukovaná šírka y

Vzťah medzi redukovanou šírkou y a geodetickou šírkou j

Z predchádzajúceho vieme, že

$$x = a \cos Y, \quad y = b \sin Y \text{ a odtiaľ } \operatorname{tg} Y = \frac{a}{b} \frac{y}{x}. \quad (1.53)$$

Podľa rovnice (1.51)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} b = (1 - e^2) \operatorname{tg} j \quad (1.54)$$

ďalej platí

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.55)$$

Po dosadení hodnôt (1.54) a (1.55) do rovnice (1.53) dostaneme základný vzťah medzi redukovanou šírkou y a geodetickou j šírkou v tvare

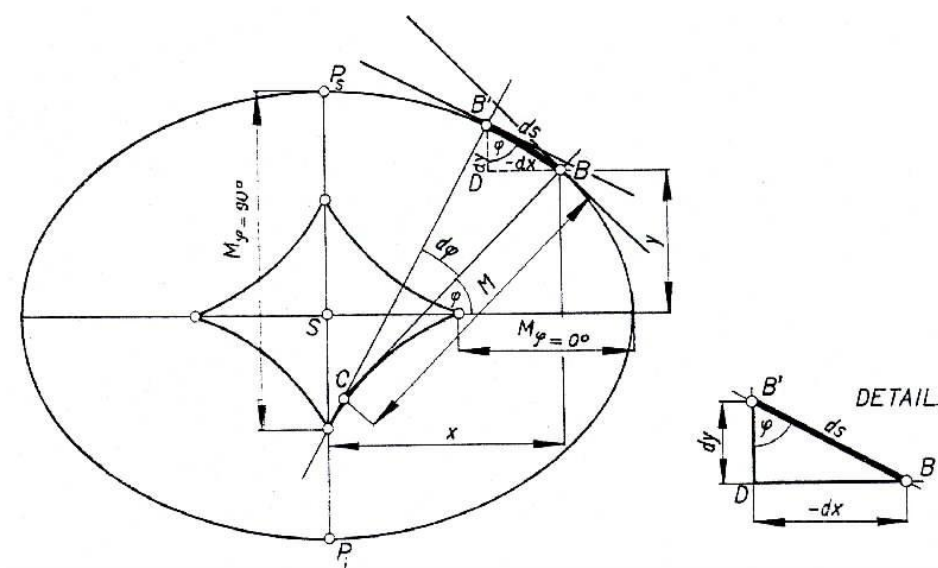
$$\operatorname{tg} Y = \frac{(1 - e^2) \operatorname{tg} j}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} j. \quad (1.56)$$

1.3.6 Polomery krivosti v danom bode na elipsoide

Normálou k elipsoidu v bode P môžeme preložiť nekonečne mnoho rovín, ktoré sú kolmé k povrchu elipsoidu. Existujú dva extrémne normálové rezy, ktorých krivosť je maximálna a minimálna. Sú to hlavné normálové rezy a zodpovedajúce polomery krivosti sú hlavné polomery krivosti: meridiánový polomer krivosti M a priečný polomer krivosti N (v rovine kolmej na poludník).

Meridiánový polomer krivosti

Normálová rovina preložená osou rotácie elipsoidu a bodom B pretína elipsoid v poludníku. Bod B má geodetickú šírku j a pravouhlé súradnice v rovine meridiánu x, y (obr.1.15).



Obr. 1.15. Meridiánový polomer krivosti

Ak prejdeme z bodu B o dĺžkový element ds do bodu B' , zmení sa geodetická šírka o dj , súradnice x a y sa zmenia o hodnoty $-dx$ a $+dy$ (x -ová súradnica sa zmenší). Z obr. 1.15 je zrejmé, že

$$ds = M dj . \quad (1.57)$$

Elementárny oblúk ds vyjadríme z trojuholníka $BB'D$

$$\sin \varphi = \frac{-dx}{ds} \Rightarrow ds = \frac{-dx}{\sin j} . \quad (1.58)$$

Po dosadení rovnice (1.58) do rovnice (1.57) dostaneme vzťah:

$$M = - \frac{1}{\sin j} \frac{dx}{dj} . \quad (1.59)$$

Hodnotu $\frac{dx}{dj}$, ktorú potrebujeme dosadiť do vzťahu (1.59) vypočítame derivovaním funkcie

$$x = \frac{a \cos j}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} = a \cos j \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-1/2}$$

podľa j .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dj} &= a \left[-\sin j \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-1/2} + \cos j \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{-3/2} (-e^2) 2 \sin j \cos j \right] = \\ &= \frac{-a \sin j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{1/2}} + \frac{ae^2 \sin j \cos^2 j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{-a \sin j \left(1-e^2 \sin^2 j\right) + ae^2 \sin j \cos^2 j}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{-a \sin j \left(1-e^2 \sin^2 j - e^2 \cos^2 j\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{-a \sin j \left[1-e^2 \left(\sin^2 j + \cos^2 j\right)\right]}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{-a \sin j \left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Po dosadení do rovnice (1.59) dostaneme pre meridiánový polomer krivosti vzťah

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2 \sin^2 j\right)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} . \quad (1.61)$$

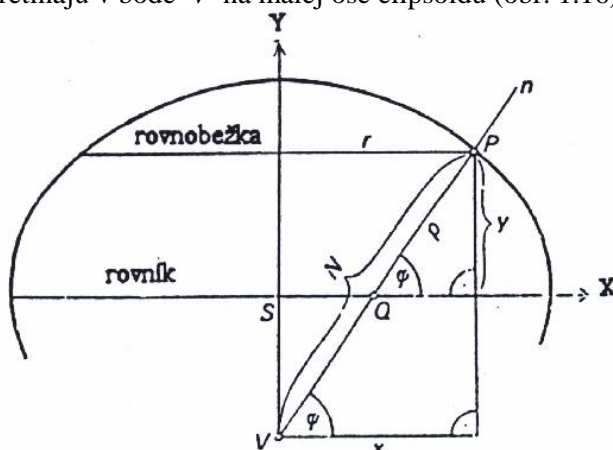
Zo vzťahu (1.61) je zrejmé, že meridiánový polomer krivosti M pre určitý elipsoid s parametrami a, e^2 je funkciou len geodetickej šírky j . Minimálnu hodnotu má na rovníku ($j = 0^\circ$, $\sin j = 0$) $M_0 = a(1-e^2)$ a maximálnu na póloch ($j = 100^\circ$, $\sin \varphi = 1$) $M_{100} = a(1-e^2)^{-1/2}$.

Ak by sme plynulo vyšetrovali priebeh meridiánového polomeru krivosti od pólu (P_s) po rovník vo všetkých kvadrantoch, geometrické miesta stredov polomeru krivosti M ležia na krivke hviezdicového tvaru (obr. 1.15).

Priečný polomer krivosti

Rovina, ktorá obsahuje normálu n v danom bode P a je kolmá k rovine poludníka, pretína elipsoid v priečnom normálovom reze. Je to tiež elipsa okrem prípadu keď bod P leží na rovníku,

vtedy je to kružnica. Normály k elipsoidu skonštruované vo všetkých bodoch tej istej rovnobežky s geodetickou šírkou j , sa pretínajú v bode V na malej ose elipsoidu (obr. 1.16).



Obr. 1.16. Priečný polomer krivosti

Priečný polomer krivosti N je daný úsečkou normály N . Z obr. 1.16 je zrejmé, že $x = N \cos j$ a teda

$$N = \frac{x}{\cos j}. \quad (1.62)$$

Ak dosadíme za x rovnicu (1.49)

$$N = \frac{a \cos j}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} \cdot \frac{1}{\cos j} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}} = \frac{a}{W}. \quad (1.63)$$

Na rovníku ($j = 0^\circ$) je $N_0 = a$ a na póloch ($j = 90^\circ$) keď $\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a}$ je

$$N_{90} = \frac{a}{(1-e^2)^{1/2}} = \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b}. \quad (1.64)$$

Stredný polomer krivosti

Stredný polomer krivosti je daný geometrickým priemerom hlavných polomerov krivosti M a N

$$R = \sqrt{MN}. \quad (1.65)$$

Po dosadení za M a N môžeme písať

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 j)^{3/2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 j}}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 j}. \quad (1.66)$$

Polomer náhradnej zemegule

V niektorých menej náročných výpočtoch sa celý zemský elipsoid nahradzuje guľou. Polomer R tejto zemegule sa určuje tromi spôsobmi:

1. Guľa má rovnaký objem ako elipsoid, t. j.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad \text{a teda} \quad R = \sqrt[3]{a^2 b} . \quad (1.67)$$

2. Guľa má rovnaký povrch ako elipsoid, t. j.

$$4\pi R^2 = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right) \quad \text{a teda}$$

$$R = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots} \quad (1.68)$$

3. Guľa má polomer rovný aritmetickému priemeru všetkých troch poloosí elipsoidu

$$R = \frac{a + b + a}{3} . \quad (1.69)$$

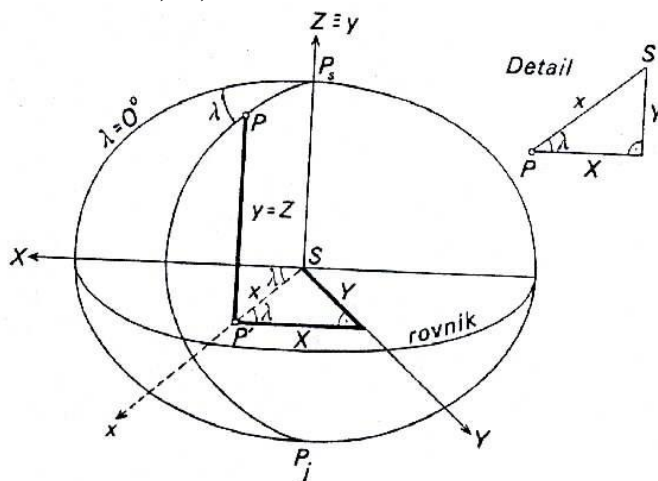
Všetky tri hodnoty R sú po zaokrúhlení na 0,1 km prakticky rovnaké:

$R = 6\,370,3$ km pre elipsoid Besselov,

$R = 6\,371,1$ km pre elipsoid Krasovského,

$R = 6\,371,0$ km pre elipsoid WGS 84.

1.3.7 Vzťah medzi geodetickými zemepisnými súradnicami j, l a priestorovými pravouhlými súradnicami X, Y, Z



Obr. 1.17. Vzťah geodetických zemepisných súradníc j, l a priestorových súradníc X, Y, Z

Na obr. 1.17 je nultý Greenwichský poludník nakreslený v rovine obrázka. Bodom P prechádza poludník $P_S - P - P_J - P_S$ o geodetickej dĺžke l . V rovine tohto poludníka má bod P pravouhlé súradnice dané rovnicami (1.50).

Podľa definície pravouhlého súradnicového systému v kap. 1.3.3 a obr. 1.17 platí

$$X = x \cos l, \quad Y = x \sin l, \quad Z = y. \quad (1.70)$$

Keď dosadíme do rovníc (1.70) súradnice x a y z rovníc (1.50) dostaneme

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{W} \cos j \cos l = N \cos j \cos l, \\ Y &= \frac{a}{W} \cos j \sin l = N \cos j \sin l, \\ Z &= \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin j = N (1 - e^2) \sin j, \end{aligned} \quad (1.71)$$

keď pričný polomer krivosti $N = \frac{a}{W}$ (kap. 1.3.6).

1.3.8 Výpočet dĺžky oblúka poludníka a rovnobežky

Výpočet dĺžky oblúka poludníka (rektifikácia meridiánu)

Na meridiánovej elipse leží bod $B(j)$. V diferenciálnej vzdialenosti ds od bodu B je bod $B'(j + dj)$ (obr. 1.15).

Polomer krivosti meridiánu v bode B je M . Z obrázku 1.15 je

$ds = M dj$ a po dosadení do rovnice (1.61) dostaneme diferenciál oblúka

$$ds = a(1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2} dj. \quad (1.72)$$

Oblúk s od rovníka ($j = 0^\circ$) po bod s geodetickou šírkou j vypočítame integráciou rovnice (1.72)

$$s = \int_0^j M dj = a(1 - e^2) \int_0^j (1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2} dj. \quad (1.73)$$

Eliptický integrál na pravej strane rovnice (1.73), ktorý nemá uzatvorené riešenie, je možné počítat' dvojakým spôsobom:

1. rozvinutím funkcie $(1 - e^2 \sin^2 j)^{-3/2}$ do radu podľa binomickej vety alebo
2. numerickou integráciou na PC. Takmer každý softvér, určený pre numerické metódy, obsahuje program pre numerickú integráciu.

Dĺžka oblúka rovnobežky

Ravnobežka o geodetickej šírke j je kružnica s polomerom $r = N \cos j$ (obr. 1.16).

Oblúk s rovnobežky medzi bodmi o geodetických dĺžkach l_1, l_2 je oblúkom kružnice s polomerom r pri stredovom uhle $\Delta l = l_2 - l_1$, t. j.

$$s = N \cos j \frac{\Delta l''}{r''} = \frac{N}{r''} \cos j \Delta l'' \quad (1.74)$$

Poznámka: Veličina $\cos j / r''$ sa zostavuje do tabuliek k argumentu j .

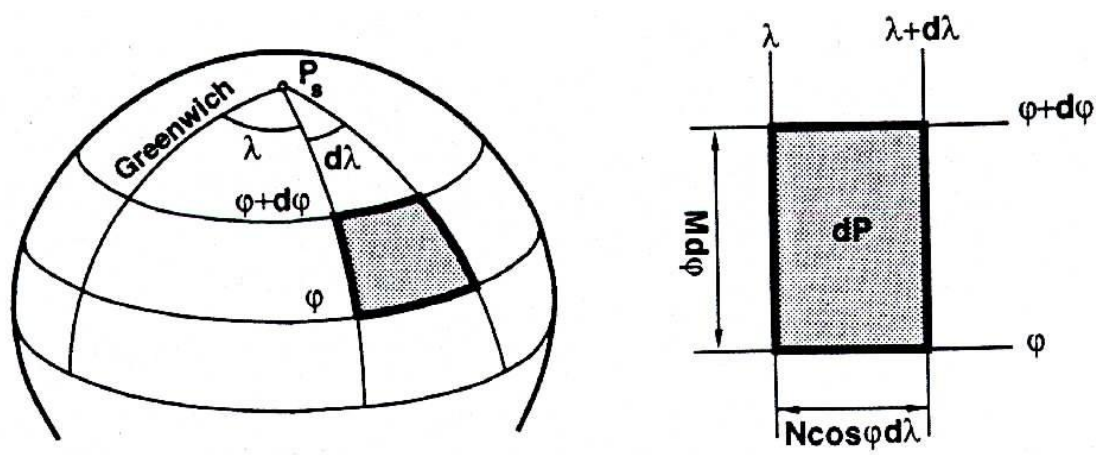
1.3.9 Povrch časti a celého elipsoidu

Sieť poludníkov a rovnobežiek vytvára na povrchu elipsoidu elipsoidické lichobežníky (obr. 1.18). Diferenciálny lichobežník môžeme považovať za rovinný obdĺžnik o stranách $M dj$ a $N \cos j dl$, ktorého obsah je

$$dP = MN \cos j \, dj \, dl \quad (1.75)$$

Ak dosadíme za M, N dostaneme

$$dP = \frac{a^2 (1 - e^2) \cos j}{(1 - e^2 \sin^2 j)^2} dj \, dl. \quad (1.76)$$



Obr. 1.18. Povrch časti zemského elipsoidu

Obsah lichobežníka, obmedzeného poludníkmi l_1, l_2 a rovnobežkami j_1, j_2 , by sme dostali integráciou rovnice (1.76) v medziach l_1, l_2 a j_1, j_2 . Plocha sa počíta od rovníka ($j = 0$) po rovnobežku j_1 , resp. j_2 :

$$\begin{aligned} P_0^j &= a^2 (1 - e^2) \int_{l_1}^{l_2} \int_0^j \cos j (1 - e^2 \sin^2 j)^{-2} dj \, dl = \\ &= a^2 (1 - e^2) (l_2 - l_1) \int_0^j \cos j (1 - e^2 \sin^2 j)^{-2} dj. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Počítaná plocha P je

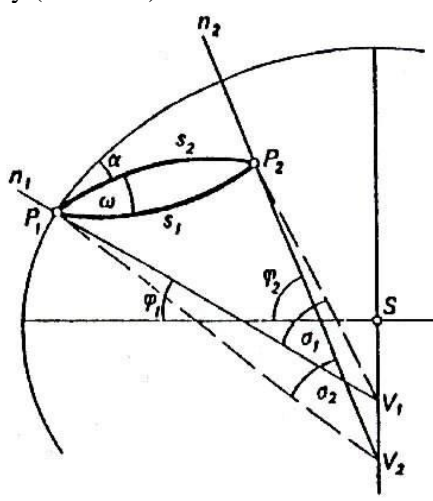
$$P = P_0^{j_2} - P_0^{j_1} \quad (1.78)$$

Eliptický integrál na pravej strane rovnice (1.77) je možné (podobne ako u dĺžky oblúka meridiánu) riešiť dvojakým spôsobom:

1. rozvinutím funkcie $\cos j (1 - e^2 \sin^2 j)^{-2}$ do rady podľa binomickej vety alebo
2. numerickou integráciou na PC.

1.3.10 Normálové rezy a geodetická čiara na referenčnom elipsoide

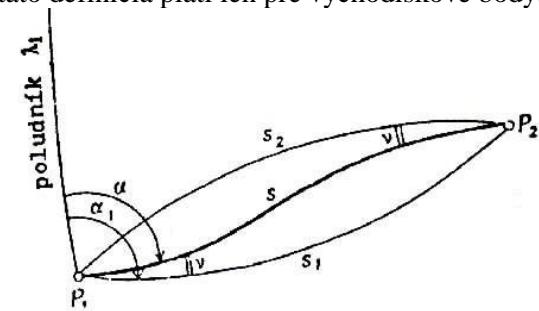
Medzi dvoma bodmi na referenčnom elipsoide P_1 a P_2 s rôznymi geodetickými šírkami a dĺžkami existujú dva normálové rezy (obr. 1.19).



Obr. 1.19. Normálové rezy na elipsoide medzi dvoma bodmi

Normála n_1 k elipsoidu v bode P_1 pretne jeho malú os v bode V_1 , normála n_2 v bode P_2 v bode V_2 . Rovina určená bodmi P_1 V_1 P_2 obsahuje teda normálu n_1 . Je to normálová rovina v bode P_1 , ktorá prechádza bodom P_2 . Táto rovina pretína rotačný (referenčný) elipsoid v priamom normálovom reze s_1 . Normálová rovina, obsahujúca normálu n_2 a bod P_1 preto pretne elipsoid v spätnom normálovom reze s_2 . Priamy a spätný normálový rez sú vzájomné normálové rezy (obr.1.19). Vzájomné normálové rezy splynú v jedinú čiaru, ak ležia body P_1 a P_2 na rovnakom poludníku alebo na rovnakej rovnobežke.

Geodetická čiara - najkratšia spojnica dvoch bodov na ploche - je taká čiara, ktorej hlavná normála je v každom bode totožná s normálou plochy. Jej geodetická krivosť (krivosť pravouhlého priemetu dĺžkového elementu geodetickej čiary na dotykovú rovinu plochy vo zvolenom bode) je rovná nule. Z tejto definície geodetickej čiary je zrejmé, že normálové rezy nie sú geodetickými čiarami na elipsoide, pretože táto definícia platí len pre východiskové body.

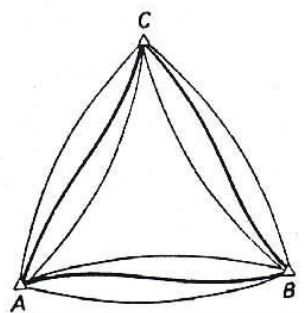


Obr.1.20. Geodetická čiara a normálové rezy

Medzi dvoma bodmi na elipsoide existujú vo všeobecnosti dva normálové rezy, ale len jedna geodetická čiara s (obr. 1.20).

Riešenie geodetických trojuholníkov na rotačnom elipsoide (obr. 1.21), bude jednoznačné len vtedy, ak spojíme ich vrcholy geodetickými čiarami, pretože si treba uvedomiť, že zámerné roviny pri meraní teodolitom pretínajú elipsoid v normálových rezoch a teda merané uhly a azimuty sa vzťahujú k normálovým rezom. Preto sa tieto uhly a azimuty redukujú z normálových rezov na geodetické čiary.

Na guli je geodetickou čiarou hlavná kružnica tzv. ortodróma, v rovine je to priamka.



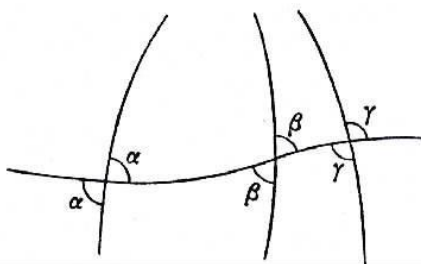
Obr.1.21. Elipsoidický trojuholník

Vlastnosti geodetickej čiary

1. Pre geodetickú čiaru na ľubovoľnej rotačnej ploche platí *Clairotová* veta: Pre každý bod určitej geodetickej čiary je súčin príslušného polomeru rovnobežky (obr. 1.16) a sínusu azimutu hodnota konštantná

$$r_i \sin a_i = N_i \cos j_i \sin a_i = \text{konst.} = k. \quad (1.79)$$

2. Geodetická čiara pretína poludníky pod dvoma azimutami, ktoré ak sú rovnaké, jeden meriame od severnej vetvy, druhý od južnej vetvy poludníka (obr. 1.22).



Obr. 1. 22. Azimuty geodetickej čiary

3. Geodetická čiara, ktorá spája body P_1 a P_2 všeobecne prebieha medzi obidvoma normálovými rezmi s_1 a s_2 (obr. 1.20). Uhol n medzi priamym normálovým rezom s_1 a geodetickou čiarou je prakticky rovnaký ako uhol medzi spätným normálovým rezom s_2 a geodetickou čiarou a rovná sa tretine uhla w medzi obidvoma normálovými rezmi:

$$n \approx \frac{w}{3}. \quad (1.80)$$

Vo zvláštnych prípadoch, keď sú obidva koncové body na rovnakej rovnobežke, normálové rezy splynú do jedného rezu, avšak geodetická čiara prebieha mimo nich.

Priebeh čiar v obecnom sférickom trojuholníku A, B, C je schématicky znázornený na obr. 1.21. Tenšími čiarami sú vykreslené normálové rezy, hrubšími čiarami geodetické čiary medzi vrcholmi sférického trojuholníka.

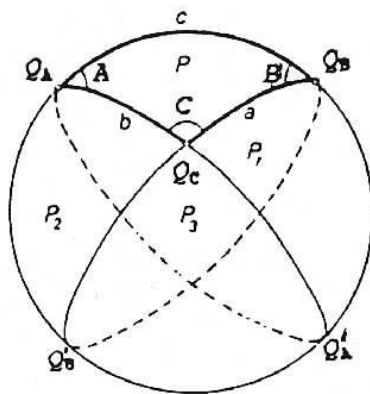
1.4 Referenčná guľa

Riešenie geodetických a kartografických úloh si môžeme podstatne zjednodušiť tým, že sa časť plochy referenčného elipsoidu nahradí guľou, tzv. referenčnou guľou. Najčastejšie sa nahradzuje plochou gule so stredným polomerom krivosti $R = \sqrt{MN}$. Napríklad pre bývalé územie Československa sa často používala guľa o polomere, ktorý sa rovná strednému polomeru krivosti pre

tohoto trojuholníka označme P . Z obrázku sú zrejme ďalšie tri sférické trojuholníky: $Q_A'Q_BQ_C$ s plochou P_1 , $Q_AQ_B'Q_C$ s plochou P_2 , $Q_B'Q_A'Q_C$ s plochou P_3 , ktoré sa s trojuholníkom $Q_AQ_BQ_C$ dopĺňajú na tri sférické dvojuholníky s uhlami A, B a C .

Plocha celej gule $P_G = 4pR^2$.

Plochy jednotlivých dvojuholníkov (pre uhly vyjadrené v gonoch) budú



Obr. 1.24. Sférický trojuholník

$$P_A = P + P_1 = \frac{4pR^2}{400} A^g,$$

$$P_B = P + P_2 = \frac{4pR^2}{400} B^g,$$

$$P_C = P + P_3 = \frac{4pR^2}{400} C^g.$$

Po spočítaní týchto rovníc dostaneme

$$2P + (P + P_1 + P_2 + P_3) = \frac{2pR^2}{200} (A + B + C). \quad (1.83)$$

Súčet plôch trojuholníkov v zátvorke na ľavej strane rovnice (1.83) dáva plochu pologule $2pR^2$ takže môžeme písať:

$$2P + 2pR^2 = \frac{2pR^2}{200} (A + B + C).$$

Po úprave dostaneme

$$P = \frac{pR^2}{200} (A + B + C - 200). \quad (1.84)$$

Výraz v zátvorke je sférický exces, takže ho môžeme vyjadriť:

$$e = \frac{200}{p} \frac{P}{R^2}.$$

Pretože $200/\pi = \rho$ (radián) napíšeme výsledný vzorec v tvare

$$e = r \frac{P}{R^2}, \quad (1.85)$$

ak dosadíme radián v „grádových sekundách“ $r^{ec} = 636620^{cc}$ platí rovnica (1.82).

1.4.2 Riešenie elipsoidických a sférických trojuholníkov

Pri bežných triangulačných prácach súvisiacich s riešením elipsoidických trojuholníkov ($s < 60$ km) považujeme tieto trojuholníky za sférické na referenčnej guli s polomerom rovným strednému polomeru krivosti $R = \sqrt{MN}$ pre strednú zemepisnú šírku $j = (j_{QA} + j_{QB} + j_{QC}) / 3$. Všeobecné vzorce sférickej trigonometrie nie sú z praktického hľadiska vhodné pre riešenie týchto trojuholníkov (strany sú vyjadrené v uhlovej miere a sú veľmi malé vzhľadom k polomeru gule; výpočty je potrebné vykonávať s veľkým počtom desatinných miest), preto sa sférické trojuholníky riešia zvláštnymi metódami: excesovou a adimentovou metódou.

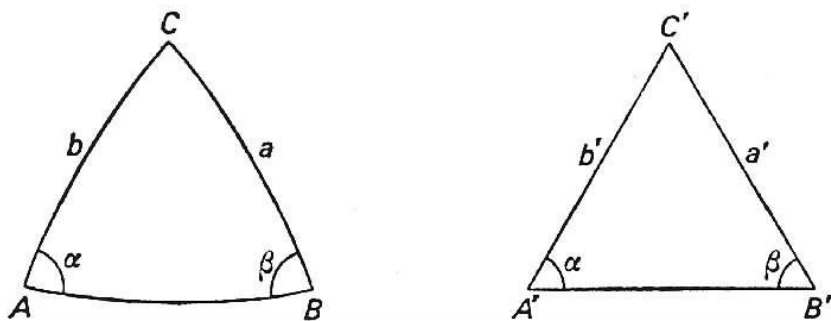
Excesová metóda je založená na Legendreovej vete: „Sférický trojuholník môžeme v geodézii riešiť ako rovinný s rovnakými stranami, ak zmenšíme každý jeho uhol o tretinu excesu“. Ak je napr. daná strana a sférického trojuholníka, obr. 1.14, vypočítame jeho strany b a c so sínusovej vety

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C', \quad (1.86)$$

$$\text{kde } A' = A - \frac{e}{3}, \quad B' = B - \frac{e}{3}, \quad C' = C - \frac{e}{3}. \quad (1.87)$$

Aditamentova (Soldnerova 1920) metóda

Pri tejto metóde má náhradný rovinný trojuholník dva uhly rovnaké ako sférický trojuholník (obr. 1.25).



Obr. 1.25 Sférický a rovinný trojuholník

Vo sférickom trojuholníku je súčet uhlov väčší ako 180° o sférický exces. Náhradný rovinný trojuholník má rovnaké uhly α , β ale má kratšie strany a' , b' . Podľa sférickej sínusovej vety na guli o polomere R platí

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \frac{b}{R}}. \quad (1.88)$$

V náhradnom rovinnom trojuholníku je sínusová veta

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a'}{b'}. \quad (1.89)$$

Rovnice (1.88) a (1.89) porovnáme a funkcie $\sin \frac{a}{R}$ a $\sin \frac{b}{R}$ rozvineme do radu podľa Mac Laurina. Rozvoj funkcie $\sin x$ má tvar $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$

Na vyjadrenie rozvoja funkcie sínus postačia prvé dva členy

$$\frac{a'}{b'} \approx \frac{\frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3}}{\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}} = \frac{a - \frac{a^3}{6R^2}}{b - \frac{b^3}{6R^2}}. \quad (1.90)$$

Z rovnice (1.90) vyplýva, že strany v náhradnom rovinnom trojuholníku majú hodnoty

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad \text{a} \quad b' = b - \frac{b^3}{6R^2}. \quad (1.91)$$

Druhé vetné členy v rovniciach (1.91) predstavujú lineárny aditament (prídavok).

Pri riešení sférického trojuholníka, ak máme danú stranu a a uhly A, B a potrebujeme vypočítať stranu b , od strany a sférického trojuholníka odpočítame hodnotu lineárneho aditamentu $\frac{a^3}{6R^2}$.

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2}. \quad (1.92)$$

Potom zo sínusovej vety môžeme vypočítať stranu b'

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Stranu b vypočítame tak, že k strane b' pripočítame príslušný lineárny aditament $b^3/6R^2$

$$b = b' + \frac{b^3}{6R^2}. \quad (1.93)$$

Hodnoty lineárneho aditamentu v S JTSK pre $R = 6\,380\,703,6105$ sú uvedené v tab. 1.1.

Lineárny aditament

Tab. 1.1

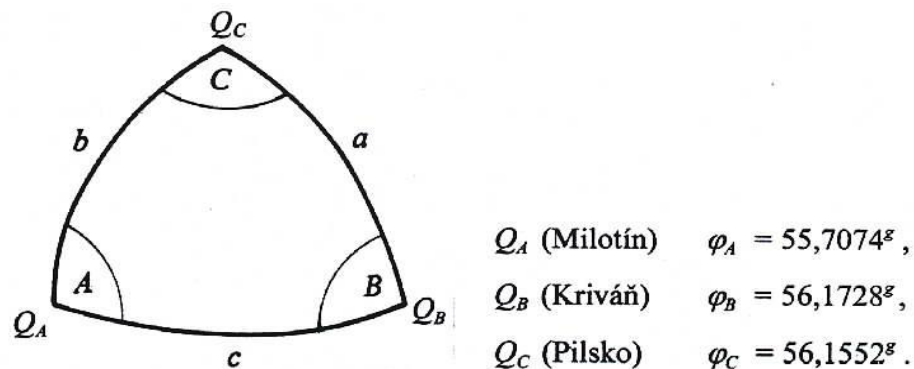
s	10 km	20 km	30 km	40 km	50 km	75 km	100 km
$S^3/6R^2$	4,1 mm	32,7 mm	110,5 mm	262,0 mm	511,7 mm	1727,0 mm	4093,7 mm

Ak dĺžky s sú kratšie ako 10 km a vyžadujeme presnosť výpočtov na cm, vtedy výpočty vo sférickom trojuholníku riešime ako úlohy v rovinnom trojuholníku.

Excesová metóda je vhodná na výpočet dĺžok strán v trojuholníkoch, keď je daná jedna strana a uhly. Aditamentová metóda je vhodná na výpočet dĺžok v trojuholníkových reťazcoch, keď bola daná východisková strana a keď ide o výpočet koncovej strany. Vtedy počítame len aditament východiskový a koncovej strany. Aditamenty ostatných strán reťazca nie je potrebné počítat.

Príklad 1:

Úlohou je určiť stredný polomer krivosti pre ťažisko elipsoidického trojuholníka (Besselov elipsoid). Dané sú geodetické šírky vrcholov trojuholníka



Meridiánový, priečny i stredný polomer krivosti určite výpočtom a kontrolu vykonajte určením stredného polomeru krivosti z tabuliek.

a) Výpočtom:

Parametre Besselovho elipsoidu sú: $a = 6\,377\,397,155$ m,

$$b = 6\,356\,078,963 \text{ m,}$$

$$e^2 = 0,006\,674\,372.$$

$$\text{Stredná geodetická šírka: } j_s = (j_A + j_B + j_C) / 3 = 56,0118^s.$$

Meridiánový polomer krivosti:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 j)^{3/2}} = 6\,372\,684 \text{ m,}$$

Priečny polomer krivosti:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}} = 6\,390\,074 \text{ m.}$$

$$\text{Stredný polomer krivosti: } R = \sqrt{MN} = 6\,381\,373 \text{ m.}$$

b) Z tabuliek:

Kontrolu výpočtu stredného polomeru krivosti sme vykonali pomocou Schreiberových tabuliek (J.Ryšavý: Vyšší geodesie). Pre prácu s týmito tabuľkami prevedieme j_s^s z gónov na šesťdesiatinné delenie t.j. stupne a minúty $j_s^o = 50^\circ 24,64'$. (Góny na stupne prevedieme vynásobením $0,9 - 56,0118 \cdot 0,9 = 50,41062^\circ$, časť za desatinou čiarkou prevedieme na minúty vynásobením $0,6 - 0,40162 \cdot 0,6 = 24,64'$).

$$\log R \quad \text{pre } 50^\circ 20' \quad = 6,804\,91\,360$$

$$\text{pre } 4,64' \quad = \quad 53$$

$$\text{pre } 50^\circ 24,64' \quad = 6,804\,91\,413$$

$$R = 6\,381\,373 \text{ m.}$$

Príklad 2:

Úlohou je vypočítať dĺžku strany a na Besselovom elipsoide excesovou metódou. Dané sú uhly $A = 67,72598^\circ$, $B = 54,59209^\circ$ a strana $c = 60\,079,63$ m. Ide o ten istý elipsoidický trojuholník, ako v príklade 1. Hodnoty geodetických širok preberieme.

Pre ťažisko elipsoidického trojuholníka vypočítame stredný polomer krivosti (preberieme ho z príkladu 1), vypočítame plochu trojuholníka a sférický exces pre referenčnú guľu. Opravíme merané uhly a nakoniec zo sínusovej vety vypočítame dĺžku a na Besselovom elipsoide.

Plochu P vypočítame ako v rovinnom trojuholníku:

$$P = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} = 1,2704 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

$$\text{Sférický exces: } e^{cc} = r^{cc} \frac{P}{R^2} = 19,862^{cc}, \quad (r^{cc} = 636\,620^{cc}).$$

Pri aplikácii excesovej metódy sa dĺžky ponechajú a uhly sa zmenšia o tretinu excesu:

$$A' = A - \frac{e}{3} = 67,72532^\circ, \quad B' = B - \frac{e}{3} = 54,59143^\circ.$$

Nakoniec dosadením do sínusovej vety (pre rovinný trojuholník) vypočítame dĺžku strany a na elipsoide:

$$a = c \frac{\sin B}{\sin A} = 55\,923,89 \text{ m}.$$

1.4.3 Riešenie základných geodetických úloh na guli

Základné (tiež hlavné) geodetické úlohy sú definované (pre guľu aj elipsoid) takto:

I. základná geodetická úloha:

Sú dané geodetické súradnice j_1, I_1 bodu P_1 , azimut a_{12} a dĺžka geodetickej čiary s_{12} na bod P_2 . Máme vypočítať geodetické súradnice j_2, I_2 a azimut a_{21} v bode P_2 (obr. 1.25).

II. základná geodetická úloha:

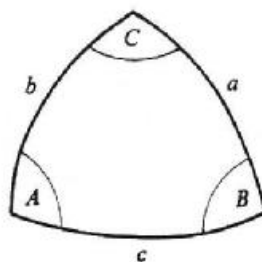
Sú dané geodetické súradnice j_1, I_1 a j_2, I_2 bodov P_1 a P_2 . Máme vypočítať dĺžku geodetickej krivky s_{12} a obidva azimuty a_{12} a a_{21} v daných koncových bodoch krivky.

Vo sférickom trojuholníku (obr. 1.25) platia vzťahy podľa nasledovných vzorov:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

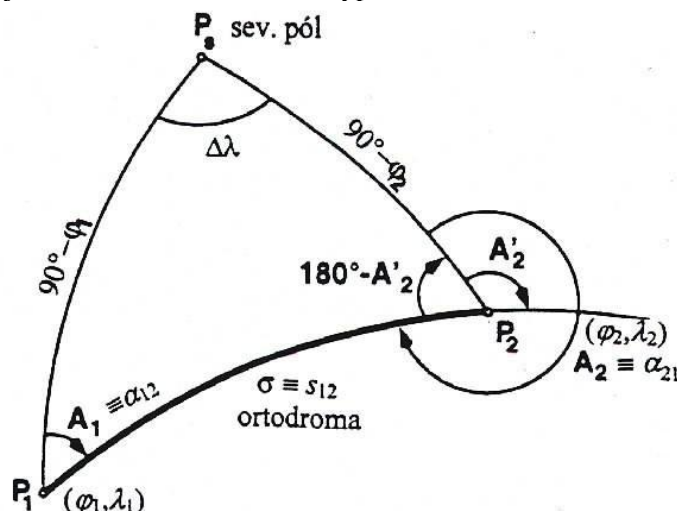
$$\sin C = \sin c \frac{\sin A}{\sin a}$$



Obr. 1.26. Sférický trojuholník

Riešenie: I. základnej geodetickej úlohy na guli v zemepisných súradniciach

Na guli s polomerom R je daný bod $P_1(j_1, I_1)$, dĺžka geodetickej krivky (ortodromy) S medzi bodmi P_1 a P_2 a jej azimut v bode P_1 . Máme vypočítať súradnice a azimut v bode $P_2(j_2, I_2, A_2)$.



Obr. 1.27. Základné geodetické úlohy na guli

Vo sférickom polárnom trojuholníku $P_1P_2P_s$ (obr. 1.26) platí kosínusová veta

$$\cos(90^\circ - j_2) = \cos(90^\circ - j_1) \cos \frac{S}{R} + \sin(90^\circ - j_1) \sin \frac{S}{R} \cos A_1$$

po úprave

$$\sin j_2 = \sin j_1 \cos \frac{S}{R} + \cos j_1 \sin \frac{S}{R} \cos A_1 \quad (1.94)$$

Ďalej je podľa sínusovej vety

$$\sin \Delta I = \sin \frac{S}{R} \frac{\sin A_1}{\sin(90^\circ - j_2)} = \sin \frac{S}{R} \frac{\sin A_1}{\cos j_2}, \quad (1.95)$$

$$\sin(180^\circ - A'_2) = \sin A'_2 = -\sin A_2 = \cos j_1 \frac{\sin A_1}{\cos j_2} = \cos j_1 \frac{\sin \Delta I}{\sin S / R} \quad (1.96)$$

Z rovnice (1.94) vypočítame j_2 , z rovnice (1.95) ΔI a ďalej $I_2 = I_1 + \Delta I$. Kvadranty uhlov ΔI a j_2 sa určia výpočtom z kosínusových viet vo sférickom trojuholníku.

Riešenie II. základné geodetické úlohy na guli v zemepisných súradniciach

Na guli s polomerom R sú dané zemepisné súradnice bodov $P_1(j_1, I_1)$ a $P_2(j_2, I_2)$. Máme vypočítať dĺžku oblúka geodetickej čiary (ortodromy) S_{12} medzi bodmi P_1 a P_2 a azimuty A_1, A_2 v týchto bodoch.

Vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platia Neperove analógie

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cotg \frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cotg \frac{C}{2}.$$

Všeobecne platné vzťahy goniometrických funkcií sú:

$$\cos(-a) = \cos a,$$

$$\sin(-a) = -\sin a,$$

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a,$$

$$\cotg(-a) = -\cotg a,$$

$$\operatorname{tg}(j+90^\circ) = -\cotg j,$$

$$\operatorname{tg}(a-90) = -\cotg a,$$

$$\cos(90-j) = \sin j.$$

Pre uhly $(A_1 + (180^\circ - A'_2))$ vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A_1 - A'_2 + 180}{2} &= \frac{\cos\left(\frac{90-j_2-(90-j_1)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{90-j_1+90-j_2}{2}\right)} \cot g \frac{\Delta I}{2}, \\ -\cot g \frac{A_1 - A'_2}{2} &= \frac{\cos \frac{j_1-j_2}{2}}{\sin \frac{j_1+j_2}{2}} \cdot \cot g \frac{\Delta I}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{A'_2 - A_1}{2} &= \frac{\sin \frac{j_1+j_2}{2}}{\cos \frac{j_2-j_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\Delta I}{2}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Pri odvodení rovnice (1.93) sme použili úpravy:

$$\begin{aligned} -\cot g \left(\frac{A_1 - A'_2}{2} \right) &= \cot g \left(\frac{A'_2 - A_1}{2} \right), \\ \cos \frac{(j_1-j_2)}{2} &= \cos \left(-\frac{j_2-j_1}{2} \right) = \cos \frac{j_2-j_1}{2}, \\ \cos \frac{(180-(j_1+j_2))}{2} &= \sin \frac{(j_1+j_2)}{2}. \end{aligned}$$

Pre uhly $(A_1 - (180^\circ - A'_2))$ vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platí

$$\begin{aligned}
tg \frac{A_1 + A'_2 - 180^\circ}{2} &= \frac{\sin\left(\frac{90 - j_2 - (90 - j_1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{90 - j_2 + 90 - j_1}{2}\right)} \cot g \frac{\Delta I}{2}, \\
- \cot g \frac{A_1 + A'_2}{2} &= \frac{\sin \frac{j_1 - j_2}{2}}{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}} \cdot \cot g \frac{\Delta I}{2} = \frac{\sin\left(\frac{j_2 - j_1}{2}\right)}{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}} \cdot \cot g \frac{\Delta I}{2} \quad / \cdot -1 \\
tg \frac{A_1 + A'_2}{2} &= \frac{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}}{\sin \frac{j_2 - j_1}{2}} tg \frac{\Delta I}{2}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Pri odvodení rovnice 1.94 sme použili úpravy:

$$\sin\left(-\frac{j_2 - j_1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{j_2 - j_1}{2}\right).$$

Ľavé strany rovníc (1.97) a (1.98) vypočítame z funkcií arctg pravých strán rovníc. Súčtom a rozdielom upravených rovníc 1.97 a 1.98 vypočítame neznáme uhly A_1 a A_2 .

$$\begin{aligned}
A'_2 &= \frac{A'_2 - A_1}{2} + \frac{A'_2 + A_1}{2}, \\
A_1 &= \frac{A'_2 + A_1}{2} - \frac{A'_2 - A_1}{2} \text{ a} \\
A_2 &= A'_2 \pm 180^\circ.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Podľa sínusovej vety je ďalej

$$\sin \frac{S}{R} = \sin \Delta I \frac{\sin(90^\circ - j_1)}{\sin(180^\circ - A'_2)} = \sin \Delta I \frac{\sin(90^\circ - j_2)}{\sin A_1}.$$

Po úprave, keď sme použili $(\sin(180^\circ - A'_2)) = \sin A'_2$ dostaneme

$$\sin \frac{S}{R} = \sin \Delta I \frac{\cos j_1}{\sin A'_2} = \sin \Delta I \frac{\cos j_2}{\sin A_1}. \tag{1.100}$$

Z rovníc 1.100 vypočítame S/R v uhlovej miere; dĺžka oblúka (strany) v dĺžkovej miere je

$$S = \frac{S}{R} \frac{R}{r''}. \tag{1.101}$$

Kvadranty azimutov A_1 , A'_2 a kladný alebo záporný zmysel dĺžky S sa zvyčajne určuje na mape, na globe alebo z vhodného obrázka.