

7. TROJROZMERNÁ GEODÉZIA

Vo Svetovom geodetickom systéme polohu bodu určujeme geodetickými zemepisnými súradnicami j , l a výškou H_N nad nulovou vzťažnou plochou. Zemepisné súradnice j , l zodpovedajú priemetu bodu, ktorý leží na terénnom reliéfe Zeme, na normále k referenčnému elipsoidu. Výška H_N sa vzťahuje ku kvázigeoidu (vo výškovom systéme Bpv), určuje sa z nivelačných a gravimetrických meraní. V súčasnom období sa na vyjadrenie polohy a výšky bodu používajú rôzne vzťažné plochy.

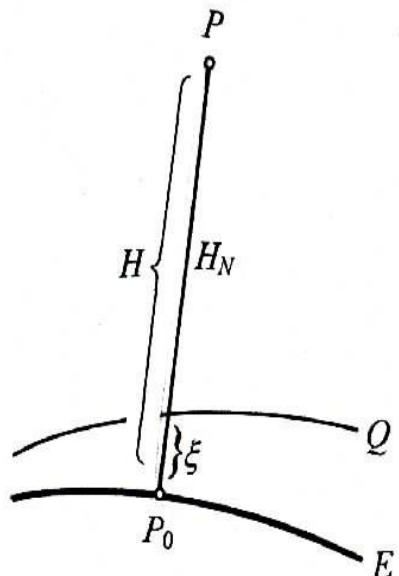
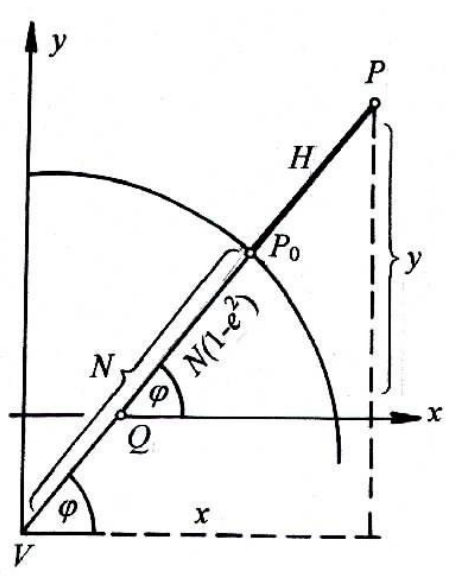
Polohu bodu na elipsoide, resp. na zemskom povrchu vyjadrujeme tiež priestorovými pravouhlými súradnicami X , Y , Z vo svetovom súradnicovom systéme (WGS-84). (Pozn.: v S-JTSK označujeme súradnice bodov y , x , H). Takéto vyjadrenie priestorovej polohy bodu označujeme **trojrozmerná geodézia** alebo priestorová geodézia. V súčasnom období trojrozmerná geodézia nadobúda mimoriadny význam s aplikovaním metód globálneho určenia priestorovej polohy bodov (GPS). Metódu GPS zaraďujeme do geodetickej disciplíny s pomenovaním **kozmickej geodézia**.

Výsledkom meraní GPS sú priestorové súradnice X , Y , Z v súradnicovom systéme WGS-84. Zo systému WGS-84 do S-JTSK prechádzame transformáciou súradníc. Úlohou vyššej geodézie je tiež transformácia súradníc v rámci trojrozmernej geodézie. Ide o transformačné vzťahy medzi zemepisnými súradnicami j , l , H a priestorovými súradnicami X , Y , Z .

7.1 Transformácia súradníc j , l , H na X , Y , Z .

Vzťah medzi geodetickými zemepisnými súradnicami j , l , a pravouhlými súradnicami X , Y , Z sme odvodili v kap. 1.3.7. Priemet bodu P na elipsoide je v bode P_0 , body P a P_0 majú rovnaké zemepisné súradnice j , l (obr. 7.1). Priestorové súradnice bodu P_0 v geocentrickom súradnicovom systéme sú

$$\begin{aligned} X_0 &= N \cos j \cos l, \\ Y_0 &= N \cos j \sin l, \\ Z_0 &= N(1 - e^2) \sin j. \end{aligned} \quad (7.1)$$



Obr. 7.1. Transformácia súradníc j , l , H na X , Y , Z Obr. 7.2. Výška kvázigeoidu nad elipsoidom

Bod P je od bodu P_0 vo vzdialenosti H (elipsoidická výška bodu P). V rovine meridiánovej elipsy bodu P_0 , má bod P súradnice

$$\begin{aligned}x &= (N + H) \cos j, \\y &= [N(1 - e^2) + H] \sin j.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Ak dosadíme rovnice (7.2) do rovnice

$$X = x \cos I, \quad Y = x \sin I, \quad Z = y \quad (7.3)$$

dostaneme priestorové pravouhlé súradnice bodu P

$$\begin{aligned}X &= (N + H) \cos j \cos I, \\Y &= (N + H) \cos j \sin I, \\Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin j.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Elipsoidická výška H bodu P je súčtom normálnej výšky H_N a výšky ξ kvázigeoidu Q nad elipsoidom E (obr. 7.2)

$$H = H_N + \xi \quad (7.5)$$

7.2 Transformácia súradníc X, Y, H na j, I, H

Pri niektorých špeciálnych úlohách trojrozsomernej geodézie je potrebné transformovať pravouhlé súradnice X, Y, Z na zemepisné súradnice j, I a H .

Geodetickú dĺžku I vypočítame predelením prvých dvoch rovníc (7.4)

$$\operatorname{tg} I = \frac{Y}{X}. \quad (7.6)$$

Zo vzťahu

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(N + H)^2 \cos^2 j (\cos^2 I + \sin^2 I)} = (N + H) \cos j \quad (7.7)$$

a vzťahov (7.4) vypočítame

$$\sin I = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad \text{a} \quad \cos I = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (7.8)$$

Geodetickú šírku j vypočítame aproximáciou vzťahu

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{[N(1 - e^2) + H] \sin j}{N + H \cos j} = \frac{(N + H) \sin j - Ne^2 \sin j}{(N + H) \cos j} = \operatorname{tg} j - \frac{Ne^2}{N + H} \operatorname{tg} j. \quad (7.9)$$

Po úprave $\operatorname{tg} j$ bude

$$\operatorname{tg} j = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{N}{N + H} e^2 \operatorname{tg} j. \quad (7.10)$$

V rovnici (7.10) sú neznáme N, H a j . V 1. aproximácii s ohľadom na nepomerne väčšiu hodnotu N ako H položíme $N/(N + H) = 1$. Potom dostaneme

$$tgj = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{1}{(1 - e^2)}. \quad (7.11)$$

Označme $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ a $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$. Prvú rovnicu odpočítajme od 1 a druhú rovnicu pripočítajme k 1. Dostaneme

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{a} \quad 1 + e'^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (7.12)$$

O rovniciach (7.12) platí

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \quad (7.13)$$

S uvažením rovnice (7.13) približné rovnice (7.11) budú mať v 1. aproximácii tvar

$$tgj^I = \frac{Z(1 + e'^2)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (7.14)$$

K hodnote j^I vypočítame zodpovedajúci priečny polomer krivosti $N^I = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 j^I)^{\frac{1}{2}}}$.

Z rovnice (7.7) vypočítame vzťah

$$(N + H) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos j}, \quad (7.15)$$

ktorý dosadíme do rovnice (7.10)

$$tgj = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{Ne^2}{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos j}} \frac{\sin j}{\cos j} = \frac{Z + Ne^2 \sin j}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (7.16)$$

Druhú približnú hodnotu j^{II} dostaneme, keď j^I a N^I dosadíme do rovnice (7.16)

$$tgj^{II} = \frac{Z + N^I e^2 \sin j^I}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (7.17)$$

Postup opakujeme: k hodnote j^{II} vypočítame N^{II} a z rovnice (7.17) vypočítame j^{III} , atď.

Aproximácia zemepisnej šírky j končí ak rozdiel výsledkov dvoch po sebe idúcich aproximácií splní vzťah

$$|j^{(i+1)} - j^i| < e. \quad (7.18)$$

Kde i vyjadruje poradie aproximácie a e je vyžadovaná presnosť určenia súradnice j . Spravidla už $j^{III} = j$.

Z rovníc (7.4) a rovnice (7.7) vypočítame elipsoidickú výšku H

$$H = \frac{X}{\cos j \cos I} - N = \frac{Y}{\cos j \cos I} - N = \frac{Z}{\sin j} - N(1 - e^2) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos j} - N. \quad (7.19)$$

7.3 Smerové kosínusy priamej spojnice bodov

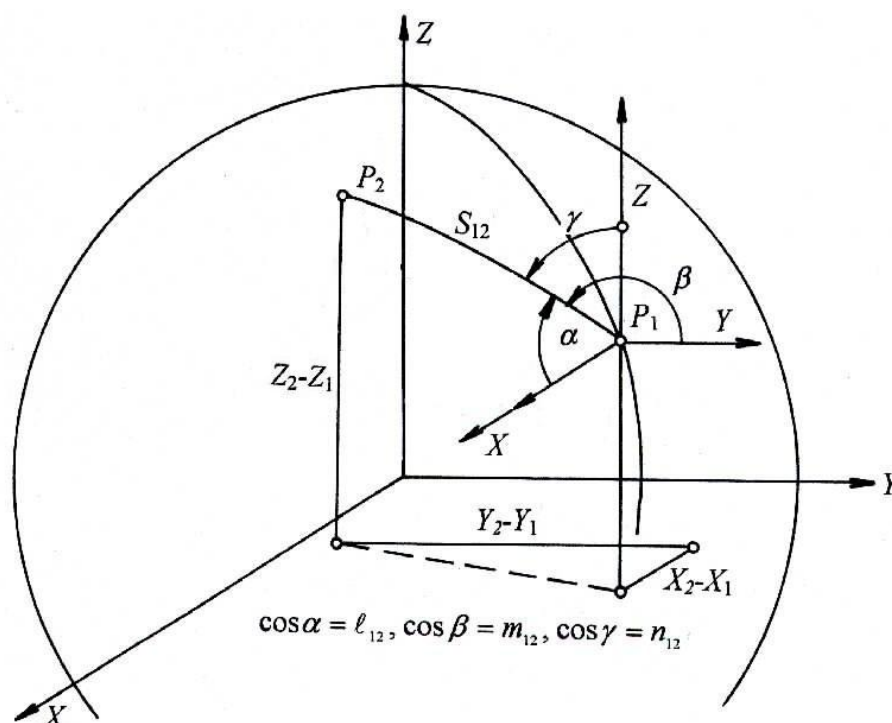
Smerové kosínusy potrebujeme k riešeniu priestorového pretínania napred. Ďalej si uvedieme ich výpočet.

Priestorová poloha priamej spojnice S_{12} medzi bodmi $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ a $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ je určená smerovými kosínusmi, ktoré označíme $\cos a = l_{12}$, $\cos b = m_{12}$ a $\cos g = n_{12}$ (obr. 7.3)

$$S_{12} = \frac{X_2 - X_1}{l_{12}} = \frac{Y_2 - Y_1}{m_{12}} = \frac{Z_2 - Z_1}{n_{12}} . \quad (7.20)$$

O smerových kosínusoch platí

$$l_{12}^2 + m_{12}^2 + n_{12}^2 = 1 . \quad (7.21)$$



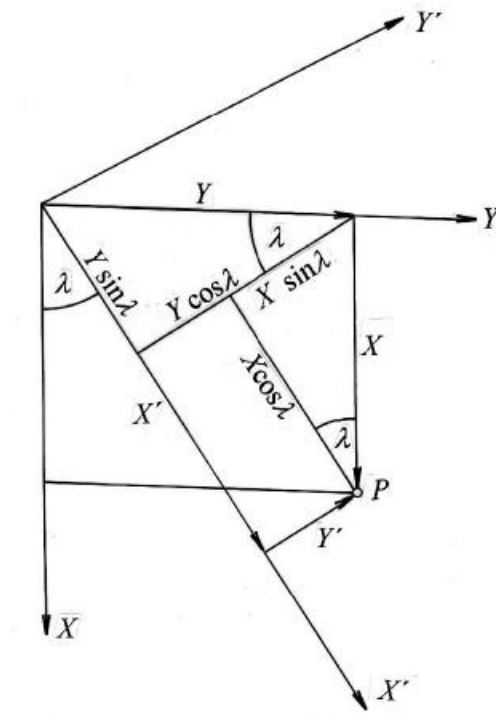
Obr. 7.3. Priama spojnice na guli

Keď budeme mať dané súradnice bodu $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, dĺžku priamej spojnice S_{12} a jej smerové kosínusy l_{12} , m_{12} a n_{12} , súradnice bodu $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ vypočítame podľa rovníc

$$X_2 = X_1 + S_{12} l_{12} , \quad Y_2 = Y_1 + S_{12} m_{12} , \quad Z_2 = Z_1 + S_{12} n_{12} . \quad (7.22)$$

Na výpočet smerových kosínusov potrebujeme poznať geodetický zenitový uhol Z_{12} a geodetický azimut A_{12} priamej spojnice bodov $P_1 P_2$. Okrem toho podľa predchádzajúcej kapitoly je potrebné vypočítať zemepisné súradnice bodu $P_1(j_1, l_1)$.

Súradnicový systém X, Y, Z pootočíme okolo osi Z o geodetickú zemepisnú dĺžku l_1 bodu P_1 . Nový systém a súradnice v ňom označíme X', Y', Z' (obr. 7.4).



Obr. 7.4. Transformácia súradníc

Transformované súradnice budú

$$X' = X \cos I_1 + Y \sin I_1, \quad Y' = Y \cos I_1 - X \sin I_1, \quad Z' = Z. \quad (7.23)$$

Smerové kosínusy $\mathbf{l}'_{12}, m'_{12}, n'_{12}$ v novom súradnicovom systéme budú určené podobne ako v rovniciach (7.20)

$$S_{12} \mathbf{l}'_{12} = X'_2 - X'_1, \quad S_{12} m'_{12} = Y'_2 - Y'_1, \quad S_{12} n'_{12} = Z'_2 - Z'_1. \quad (7.24)$$

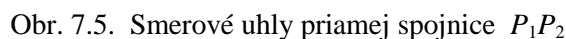
Do rovníc (7.24) dosadíme transformované súradnice z rovníc (7.23) pre body P_1 a P_2

$$\begin{aligned} S_{12} \mathbf{l}'_{12} &= (X_2 - X_1) \cos I_1 + (Y_2 - Y_1) \sin I_1, \\ S_{12} m'_{12} &= (Y_2 - Y_1) \cos I_1 - (X_2 - X_1) \sin I_1, \\ S_{12} n'_{12} &= (Z'_2 - Z'_1). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Rovnice (7.25) upravíme pomocou rovníc (7.22). Dostaneme smerové kosínusy v novom súradnicovom systéme

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'_{12} &= \mathbf{l}_{12} \cos I_1 + m_{12} \sin I_1, \\ m'_{12} &= m_{12} \cos I_1 - \mathbf{l}_{12} \sin I_1, \\ m'_{12} &= n_{12}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Na jednotkovej guľi (obr. 7.5) Z_1 je geodetický zenit bodu P_1 . Súradnicové osi nového systému sú X', Y', Z' . Smer na bod P_2 pretína jednotkovú guľu v bode S . Z obr. 7.5 odvodíme smerové kosínusy. Na výpočet použijeme geodetický zenitový uhol Z_{12} , geodetický azimut A_{12} , geodetickú šírku j_1 a smerové uhly a, b, g . Kosínusy smerových uhlov a, b, g predstavujú smerové kosínusy $\mathbf{l}'_{12}, m'_{12}$ a n'_{12} .


$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos a \quad (7.27)$$
$$\begin{aligned}\cos \mathbf{a} &= \mathbf{l}'_{12} = \cos j_1 \cos Z_{12} + \sin j_1 \sin Z_{12} \cos(200^\circ - A_{12}), \\ \cos \mathbf{b} &= \mathbf{m}'_{12} = \cos 100^\circ \cos Z_{12} + \sin 100^\circ \sin Z_{12} \cos(100^\circ - A_{12}),\end{aligned}\quad (7.28)$$

$$\begin{aligned}\cos \mathbf{a} &= \mathbf{l}'_{12} = \cos j_1 \cos Z_{12} + \sin j_1 \sin Z_{12} \cos(200^\circ - A_{12}), \\ \cos \mathbf{b} &= \mathbf{m}'_{12} = \cos 100^\circ \cos Z_{12} + \sin 100^\circ \sin Z_{12} \cos(100^\circ - A_{12}),\end{aligned}\quad (7.28)$$

$$\cos g = n'_{12} = \cos(100^\circ - j_1) \cos Z_{12} + \sin(100^\circ - j_1) \sin Z_{12} \cos A_{12}.$$

$$\begin{aligned}\cos \mathbf{a} &= \mathbf{l}'_{12} = \cos j_1 \cos Z_{12} - \sin j_1 \sin Z_{12} \cos A_{12}, \\ \cos \mathbf{b} &= m'_{12} = \sin Z_{12} \sin A_{12},\end{aligned}\tag{7.29}$$

$$\cos g = n'_{12} = \sin j_1 \cos Z_{12} + \cos j_1 \sin Z_{12} \cos A_{12}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{12} \cos I_1 + m_{12} \sin I_1 &= \cos j_1 \cos Z_{12} - \sin j_1 \sin Z_{12} \cos A_{12}, \\ m_{12} \cos I_1 - \mathbf{l}_{12} \sin I_1 &= \sin Z_{12} \sin A_{12}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$n_{12} = \sin j_1 \cos Z_{12} + \cos j_1 \sin Z_{12} \cos A_{12}.$$

$$m_{12} = \frac{\sin Z_{12} \sin A_{12} + \mathbf{l}_{12} \sin I_1}{\cos I_1}, \quad \mathbf{l}_{12} = \frac{m_{12} \cos I_1 - \sin Z_{12} \sin A_{12}}{\sin I_1},$$

ktoré dosadíme do prvej rovnice (7.30), čím dostaneme kosínusy v tvare

$$\begin{aligned} l_{12} &= \cos j_1 \cos I_1 \cos Z_{12} - \sin j_1 \cos I_1 \sin Z_{12} \cos A_{12} - \sin I_1 \sin Z_{12} \sin A_{12}, \\ m_{12} &= \cos j_1 \sin I_1 \cos Z_{12} - \sin j_1 \sin I_1 \sin Z_{12} \cos A_{12} + \cos I_1 \sin Z_{12} \sin A_{12}, \\ n_{12} &= \sin j_1 \cos Z_{12} + \cos j_1 \sin Z_{12} \cos A_{12}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ak v rovniciach (7.31) namiesto indexu „1“ napíšeme „i“ a namiesto indexu „2“ napíšeme „j“, dostaneme kosínusový l_{ij} , m_{ij} , n_{ij} pre priamu spojnicu bodov $P_i P_j$.

7.4 Prvá základná úloha v priestorových pravouhlých súradniciach

Majme dané geodetické zemepisné súradnice j_1, I_1 a výšku H_1 bodu P_1 . Na bod P_2 meriame priamu spojnicu S_{12} geodetický zenitový uhol Z_{12} a horizontálny uhol w_{i2} medzi smerom, ktorého geodetický azimut poznáme, resp. vypočítame.

Geodetický azimut A_{12} vypočítame z rovnice

$$A_{12} = A_{i1} + w_{i2}. \quad (7.32)$$

Azimut A_{i1} vypočítame zo súradníc bodu $A_1(j_1, I_1)$ a $A_i(j_i, I_i)$ postupom uvedeným v kap. 1.4.3 pre II. základnú geodetickú úlohu.

Podľa rovníc (7.4) k hodnotám geodetických zemepisných súradníc j_1, I_1, H_1 vypočítame priestorové pravouhlé súradnice X_1, Y_1, Z_1 . Dosadením daných hodnôt j_1, I_1 a odmeraných hodnôt Z_{12}, A_{12} do rovníc (7.31) vypočítame smerové kosínusy l_{12}, m_{12}, n_{12} . Priestorové pravouhlé súradnice bodu $P_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ vypočítame podľa rovníc (7.22).

7.5 Priestorové pretínanie napred

Máme dané geodetické zemepisné súradnice bodov $P_1(j_1, I_1, H_1)$ a $P_2(j_2, I_2, H_2)$, geodetické azimuty A_{13}, A_{23} , zenitové uhly Z_{13} a Z_{23} priamych spojnic na bod P_3 .

Úlohou je vypočítať súradnice bodu $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$ resp. $P_3(j_3, I_3, H_3)$.

V danej úlohe riešime priestorové pretínanie napred z odmeraných horizontálnych a zenitových uhlov.

Postup výpočtov:

1. K bodom $P_i(j_i, I_i, H_i)$ vypočítame $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ($i = 1, 2$) podľa rovníc (7.4)

2. Podľa rovníc (7.31) vypočítame smerové kosínusy l_{13}, m_{13}, n_{13} a l_{23}, m_{23}, n_{23} priamych spojnic S_{13}, S_{23} .

3. Dĺžky priamych spojnic medzi danými bodmi P_1, P_2 a určovaným bodom P_3 vypočítame podobne ako u vzťahov (7.20)

$$\frac{X_3 - X_1}{l_{13}} = \frac{Y_3 - Y_1}{m_{13}} = \frac{Z_3 - Z_1}{n_{13}} = S_{13}, \quad (7.33)$$

$$\frac{X_3 - X_2}{l_{23}} = \frac{Y_3 - Y_2}{m_{23}} = \frac{Z_3 - Z_2}{n_{23}} = S_{23}.$$

Nadbytočný počet rovníc dovoľuje určiť priame spojnice S_{12} a S_{23} vyrovnaním MNŠ. Rovnice opráv zostavíme postupom napr. pre súradnicu X

$$X_3 = \mathbf{l}_{13}S_{13} + X_1, \quad (7.34)$$

$$X_3 = \mathbf{l}_{23}S_{23} + X_2.$$

Druhú rovnicu (6.34) odpočítame od prvej a dostaneme rovnicu opravy. Podobne zostavíme aj ďalšie rovnice opráv

$$\begin{aligned} v_X &= \mathbf{l}_{13}S_{13} - \mathbf{l}_{23}S_{23} + (X_1 - X_2), \\ v_Y &= m_{13}S_{13} - m_{23}S_{23} + (Y_1 - Y_2), \\ v_Z &= n_{13}S_{13} - n_{23}S_{23} + (Z_1 - Z_2). \end{aligned} \quad (7.35)$$

K rovniciam (7.35) známym postupom napíšeme vektor opráv v tvare

$$\mathbf{v}_{(3,1)} = \mathbf{A}_{(3,2)} \mathbf{x}_{(2,1)} + \mathbf{l}_{(3,1)} \quad (7.36)$$

$$\text{kde } \mathbf{A}_{(3,2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{13} - \mathbf{l}_{23} \\ m_{13} - m_{23} \\ n_{13} - n_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{bmatrix}$$

a vypočítame priame spojnice S_{13} , S_{23}

$$\mathbf{x}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (7.37)$$

4. Priestorové pravouhlé súradnice bodu $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$ vypočítame dvakrát podľa rovníc

$$\begin{aligned} X_3 &= X_1 + \mathbf{l}_{13}S_{13}, & X_3 &= X_2 + \mathbf{l}_{23}S_{23}, \\ Y_3 &= Y_1 + m_{13}S_{13}, & Y_3 &= Y_2 + m_{23}S_{23}, \\ Z_3 &= Z_1 + n_{13}S_{13}, & Z_3 &= Z_2 + n_{23}S_{23}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Ako výsledok prijmem aritmetický priemer z vypočítaných hodnôt súradníc v rovniciach (7.38).

5. K súradniciam bodu $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$ vypočítame súradnice $P_3(j_3, l_3, h_3)$ podľa vzťahov v kap. 7.2.