

## 8. TRANSFORMÁCIA SÚRADNÍC

V geodetickej praxi je častou úlohou zmeniť súradnice bodov bez toho, aby sa zmenila ich poloha na zemskom povrchu. Zmenu súradníc označujeme pojmom **transformácia**. Transformácia sa môže dotýkať jednotlivých bodov, skupiny bodov, ale aj bodov pre celé súvislé územie.

Podľa zákona o geodézii a kartografii vyjadrujeme výsledky geodetických meraní v S-JTSK a Bpv. Do praxe čoraz viac preniká metóda globálneho určenia priestorovej polohy bodov (GPS). Výsledky družicových meraní sú v systéme WGS-84. Zjednotenie oboch súradnicových systémov umožňuje transformácia súradníc. Transformácia súradníc je tiež prostriedkom na zjednocovanie národných systémov so spoločným medzinárodným systémom vytvoreným metódami kozmickej geodézie.

Rozoznávame transformáciu **rovnorodých súradníc a nerovnorodých súradníc**.

Pri transformácii rovnorodých súradníc sa nemenia uhly. Medzi obidvoma súradnicovými systémami platia matematické vzťahy

$$Y = f(y, x), \quad X = g(y, x), \quad (8.1)$$

kde  $(y, x)$  sú súradnice prvého systému, ktoré transformujeme do druhého systému  $(Y, X)$ .

V transformácii rovnorodých súradníc ide o posun, pootočenie a úpravu mierky celej siete bodov. Je to napríklad pri spresnení mierky, zmene orientácie alebo že sa sieť bodov prispôbuje okolitej sieti.

Pri transformácii nerovnorodých súradníc neplatia vzťahy (8.1) a sa náhodne menia hodnoty uhlov a dĺžok.

K transformácii rovnorodých súradníc zaraďujeme zhodnostnú transformáciu a podobnostnú transformáciu. Nerovnorodé súradnice transformujeme projektívnymi transformáciami. K nim patrí kolíneárna transformácia a afínná transformácia. Rovinná i priestorová kolíneárna transformácia je uvedená v učebnom texte: <http://svf.utc.sk> Bitterer, L.: Základy fotogrametrie 3. vydanie.

Podobnostnú transformáciu v ktorej stotožňujeme ťažiska oboch identických systémov bodov, transformovaný systém pootočíme a mierkovo upravíme, nazývame Helmertova transformácia.

Vo všetkých druhoch transformácií platí, že transformované body majú ležať vo vnútri poľa, ktoré je ohraničené identickými bodmi v oboch systémoch súradníc.

### 8.1 Podobnostná transformácia

Transformujeme súradnice  $(y, x)$  do súradnicového systému  $(Y, X)$  obr. (8.1). Uhol  $w$  je uhol rotácie (pootočenia). Na obr. 8.1 má zápornú hodnotu.

Sieť identických bodov v systéme  $y, x$  pootočíme o uhol  $w$  a posunieme do systému  $Y, X$  o hodnoty  $Y_0, X_0$ . Súradnice  $y_i, x_i$  zmeníme na súradnice  $Y_i, X_i$  podľa transformačných rovníc:

$$Y = Y_0 + y \cos w - x \sin w, \quad (8.2)$$

$$X = X_0 + y \sin w + x \cos w.$$

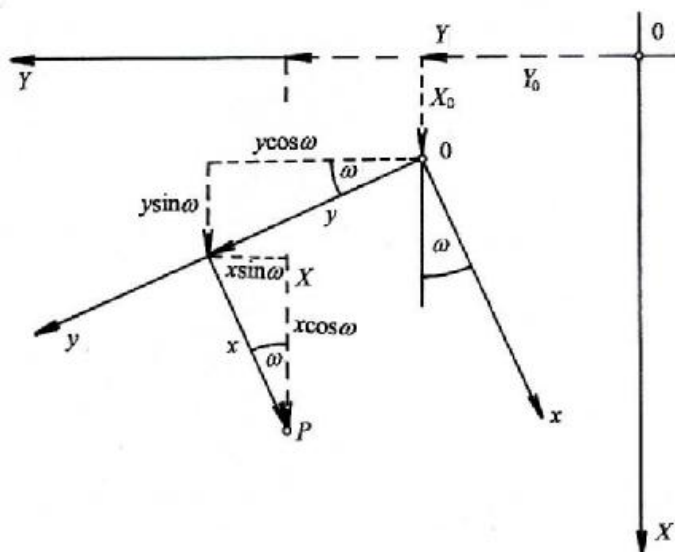
Poznámka. Pre kladnú hodnotu uhla  $+w$  rovnice (8.2) budú mať tvar

$$Y = Y_0 + y \cos w + x \sin w,$$

$$X = X_0 - y \sin w + x \cos w.$$

Označme maticu rotácie **R** a vektor translácie (posunu) **t** pre rovnice (8.2)

$$\mathbf{P}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$



Obr. 8.1. Podobnostná transformácia

V matici rotácie  $\mathbf{R}$  všetky koeficienty vynásobíme mierkovou číslou  $q$  a dostaneme rovnicu podobnostnej transformácie  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = q \mathbf{R} \mathbf{z} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Ak  $q = 1$  sa jedná o rozmerovú zhodnosť siete bodov v oboch systémoch, transformácia je zhodnostná.

Ak  $q \neq 1$  spravidla  $q \approx 1$  ide o **podobnosť**, transformácia je podobnostná.

K aplikácii podobnostnej transformácie, ak použijeme rovnakú mierku  $q$  pre obidve súradnice, potrebujeme poznať súradnice najmenej dvoch bodov. V prípade, že mierka  $\mathbf{q}^T = (q_y, q_x)$  bude predstavovať vektor o mierkových zmenách v smere osi  $Y$  a  $X$  potrebujeme poznať súradnice troch bodov. Vtedy ide o afinnú transformáciu.

Uhol pootočenja  $w$  a mierkové číslo  $q$  vypočítame z rovníc

$$w = a - a', \quad \text{kde } a = \arctg \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{a} \quad a' = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (8.5)$$

$$q^2 = \frac{S^2}{s^2} = \frac{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

## 8.2 Helmertov transformácia

Na výpočet koeficientov zhodnosti ( $q, w, Y_0, X_0$ ) potrebujeme poznať súradnice identických bodov v oboch súradnicových systémoch.

Nadbytočný počet bodov pre podobnostnú transformáciu ( $n > 2$ ) dovoľuje aplikovať transformáciu s vyrovnaním metódou najmenších štvorcov (MNŠ).

Po transformácii identických bodov z prvého systému  $(y, x)$  do druhého systému, nedostaneme súradnice  $(Y, X)$ , ale súradnice  $(Y', X')$ .

Rozdiely súradníc predstavujú opravy po transformácii

$$v_y = Y - Y' , \quad v_x = X - X' , \quad (8.6)$$

ktoré vo vyrovnaní MNŠ vyjadríme funkčným vzťahom

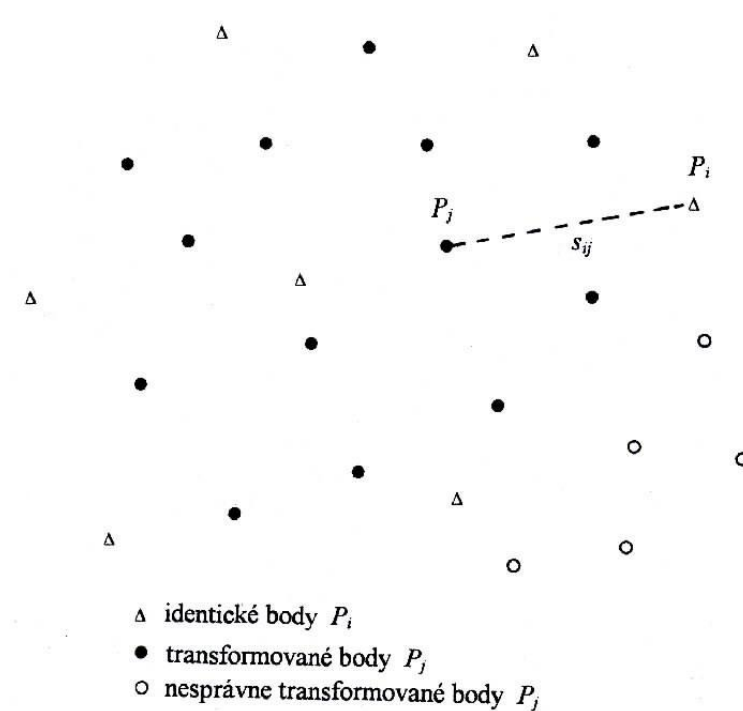
$$\sum v_y^2 + \sum v_x^2 = \min .$$

Postup výpočtu transformačných koeficientov s vyrovnaním MNŠ je uvedený v učebnom texte <http://Bitterer, L.: Geodézia III Geodetické bodové polia, 2. vydanie, kap. 10.>

Helmertová transformácia je lineárna podobnostná transformácia s vyrovnaním transformačných koeficientov podľa MNŠ.

### 8.3 Jungova transformácia

Majme skupinu identických bodov v oboch systémoch  $P_i (y_i, x_i)$  (obr. 8.2) a skupinu bodov  $P_j (y_j, x_j)$  prvého systému  $(y, x)$ , ktorú transformujeme do systému  $(Y, X)$ .



Obr. 8.2. Jungova transformácia

Vypočítame opravy po transformácii na identických bodoch podľa rovníc (8.6) s vyrovnaním MNŠ

$$v_{yi} = Y_i - Y'_i , \quad v_{xi} = X_i - X'_i . \quad (8.7)$$

Súradnice transformovaných bodov  $P_j(Y_j, X_j)$  dostaneme tak, že k súradniciam po transformácii  $P_i(Y'_i, X'_i)$  pripočítame korekcie  $d_{yj}$   $d_{xj}$ , ktoré vypočítame z rovníc

$$d_{yj} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} v_{yi}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}, \quad d_{xj} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} v_{xi}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}, \quad (8.8)$$

kde  $p_{ij} = \frac{1}{s_{ij}^2}$ ,  $s_{ij}$  je vzdialenosť transformovaného bodu  $P_j$  od identických bodov oboch systémov a  $n$  je počet identických bodov.

V Jungovej transformácii sa pripája podmienka, do akej vzdialenosti  $s_{ij}$  sa berú do úvahy identické body.

Jungova transformácia predstavuje následný krok po Helmertovej transformácii. Opravy na identických bodoch sa rozdeľujú transformovaným bodom podľa rovníc (8.8). Korekcie sa počítajú váženým aritmetickým priemerom.

#### 8.4 Afinná transformácia

Afinita je tvarová podobnosť, ak koeficient podobnosti  $q \neq 1$ . Afinita sa zmení na zhodnosť, ak koeficient podobnosti  $q = 1$ . Aplikácia afinnej transformácie sa aplikuje v prípadoch, ak sa mierkový koeficient v smere osi  $Y$  a  $X$  líši, t. j. ak  $q_y \neq q_x$ .

Rovnice (8.2) budú mať tvar

$$Y_i = Y_0 + q_y y_i \cos w - q_x x_i \sin w, \quad (8.9)$$

$$X_i = X_0 + q_x y_i \sin w + q_y x_i \cos w.$$

Keď označíme  $\cos w = a_{11} = a_{22}$ ,  $\sin w = a_{12} = a_{21}$ ,  $Y_0 = C_1$  a  $X_0 = C_2$ , členy matice rotácie budú

$$\overline{\mathbf{R}}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a_{11}q_y & -a_{12}q_y \\ a_{21}q_x & a_{22}q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Rovnica afinnej transformácie bude mať tvar

$$\overline{\mathbf{P}}_{(2,1)} = \mathbf{t}_{(2,1)} + \overline{\mathbf{R}}_{(2,2)} \mathbf{z}_{(2,1)}. \quad (8.11)$$

Počet neznámych parametrov transformácie je 6 ( $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ ,  $q_y$ ,  $q_x$ ,  $Y_0$  a  $X_0$ ). Ak máme počet identických bodov  $n > 3$ . Aplikujeme určenie transformačných parametrov s vyrovnaním MNŠ.

Rovnice opráv budú

$$v_{yi} = A_1 y_i + B_1 x_i + C_1 - Y_i, \quad (8.12)$$

$$v_{xi} = A_2 y_i + B_2 x_i + C_2 - X_i.$$

Funkcia vyrovňania MNŠ, napr. pre následovný spôsob vyjadrenia koeficientov normálnych rovníc, má tvar

$$\sum v_y^2 + \sum v_x^2 = \sum (A_1 y_i + B_1 x_i + C_1 - Y_i)^2 + \sum (A_2 y_i + B_2 x_i + C_2 - X_i)^2 = \min. \quad (8.13)$$

Funkcia MNŠ po derivácii podľa parametrov  $A_1$  až  $C_2$  má tvar

$$\mathbf{D}_{(6,6)} \mathbf{z}_{(6,1)} - \mathbf{E}_{(6,1)} = 0, \quad (8.14)$$

kde

$$\mathbf{D}_{(6,6)} = \begin{pmatrix} \sum y^2 & \sum yx & \sum y & 0 & 0 & 0 \\ \sum yx & \sum x^2 & \sum x & 0 & 0 & 0 \\ \sum y & \sum x & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum y^2 & \sum yx & \sum y \\ 0 & 0 & 0 & \sum yx & \sum x^2 & \sum x \\ 0 & 0 & 0 & \sum y & \sum x & n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_2 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} \sum yY \\ \sum xY \\ \sum Y \\ \sum yX \\ \sum xX \\ \sum X \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Parametre  $A_1$  až  $C_2$  vypočítame riešením rovnice (8.14)

$$\mathbf{z}_{(6,1)} = \mathbf{D}_{(6,6)}^{-1} \mathbf{E}_{(6,1)}. \quad (8.16)$$

Súradnice bodov  $P_j (y_j, x_j)$  transformujeme s využitím rovnice (8.11).

Mierkové koeficienty  $q_y$  a  $q_x$  môžeme vypočítať porovnaním parametrov  $A_1$  až  $B_2$  s členmi rotačnej matice  $\bar{\mathbf{R}}$ .

$$A_1 = q_y \cos w, \quad B_1 = -q_y \sin w, \quad (8.17)$$

$$A_2 = q_x \sin w, \quad B_2 = q_x \cos w.$$

Najprv vypočítame uhol rotácie  $w$  a potom mierkové koeficienty  $q_y$  a  $q_x$

$$w = \arctg \frac{A_2}{B_2} = \arctg \frac{-B_1}{A_1}, \quad q_y = \frac{A_1}{\cos w} = \frac{-B_1}{\sin w}, \quad q_x = \frac{A_2}{\sin w} = \frac{B_2}{\cos w}. \quad (8.18)$$

Afinnú transformáciu používame napr. pri vektorizácii analógových máp, keď zrážka fotografického mapy v pozdĺžnom a priečnom smere mohla ovplyvniť mierku mapy v smere osí  $X$  a  $Y$ . Na použitie afinnej transformácie vo výpočtoch v triangulačnej sieti nie sú dôvody.