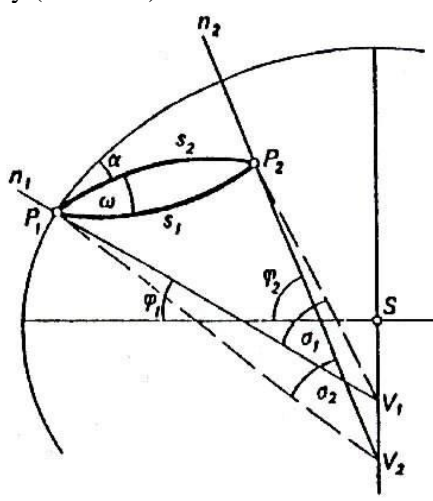


1.3.10 Normálové rezy a geodetická čiara na referenčnom elipsoide

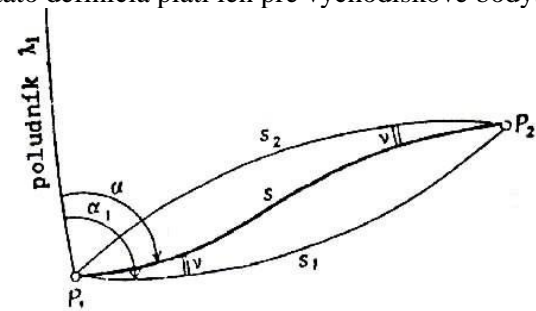
Medzi dvoma bodmi na referenčnom elipsoide P_1 a P_2 s rôznymi geodetickými šírkami a dĺžkami existujú dva normálové rezy (obr. 1.19).



Obr. 1.19. Normálové rezy na elipsoide medzi dvoma bodmi

Normála n_1 k elipsoidu v bode P_1 pretne jeho malú os v bode V_1 , normála n_2 v bode P_2 v bode V_2 . Rovina určená bodmi P_1 V_1 P_2 obsahuje teda normálu n_1 . Je to normálová rovina v bode P_1 , ktorá prechádza bodom P_2 . Táto rovina pretína rotačný (referenčný) elipsoid v priamom normálovom reze s_1 . Normálová rovina, obsahujúca normálu n_2 a bod P_1 preto pretne elipsoid v spätnom normálovom reze s_2 . Priamy a spätný normálový rez sú vzájomné normálové rezy (obr.1.19). Vzájomné normálové rezy splynú v jedinú čiaru, ak ležia body P_1 a P_2 na rovnakom poludníku alebo na rovnakej rovnobežke.

Geodetická čiara - najkratšia spojnica dvoch bodov na ploche - je taká čiara, ktorej hlavná normála je v každom bode totožná s normálou plochy. Jej geodetická krivosť (krivosť pravouhlého priemetu dĺžkového elementu geodetickej čiary na dotykovú rovinu plochy vo zvolenom bode) je rovná nule. Z tejto definície geodetickej čiary je zrejmé, že normálové rezy nie sú geodetickými čiarami na elipsoide, pretože táto definícia platí len pre východiskové body.

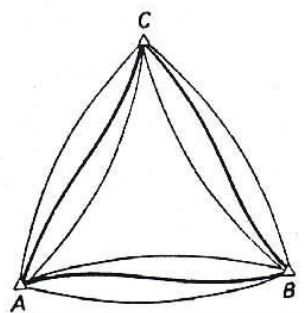


Obr.1.20. Geodetická čiara a normálové rezy

Medzi dvoma bodmi na elipsoide existujú vo všeobecnosti dva normálové rezy, ale len jedna geodetická čiara s (obr. 1.20).

Riešenie geodetických trojuholníkov na rotačnom elipsoide (obr. 1.21), bude jednoznačné len vtedy, ak spojíme ich vrcholy geodetickými čiarami, pretože si treba uvedomiť, že zámerné roviny pri meraní teodolitom pretínajú elipsoid v normálových rezoch a teda merané uhly a azimuty sa vzťahujú k normálovým rezom. Preto sa tieto uhly a azimuty redukujú z normálových rezov na geodetické čiary.

Na guli je geodetickou čiarou hlavná kružnica tzv. ortodróma, v rovine je to priamka.



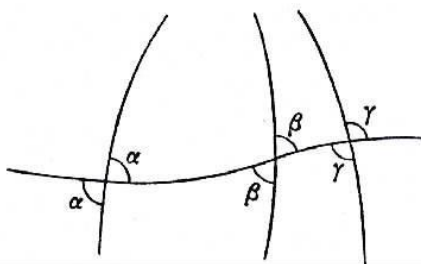
Obr.1.21. Elipsoidický trojuholník

Vlastnosti geodetickej čiary

1. Pre geodetickú čiaru na ľubovoľnej rotačnej ploche platí *Clairotová* veta: Pre každý bod určitej geodetickej čiary je súčin príslušného polomeru rovnobežky (obr. 1.16) a sínusu azimutu hodnota konštantná

$$r_i \sin a_i = N_i \cos j_i \sin a_i = \text{konst.} = k. \quad (1.79)$$

2. Geodetická čiara pretína poludníky pod dvoma azimutami, ktoré ak sú rovnaké, jeden meriame od severnej vetvy, druhý od južnej vetvy poludníka (obr. 1.22).



Obr. 1. 22. Azimuty geodetickej čiary

3. Geodetická čiara, ktorá spája body P_1 a P_2 všeobecne prebieha medzi obidvoma normálovými rezmi s_1 a s_2 (obr. 1.20). Uhol n medzi priamym normálovým rezom s_1 a geodetickou čiarou je prakticky rovnaký ako uhol medzi spätným normálovým rezom s_2 a geodetickou čiarou a rovná sa tretine uhla w medzi obidvoma normálovými rezmi:

$$n \approx \frac{w}{3}. \quad (1.80)$$

Vo zvláštnych prípadoch, keď sú obidva koncové body na rovnakej rovnobežke, normálové rezy splynú do jedného rezu, avšak geodetická čiara prebieha mimo nich.

Priebeh čiar v obecnom sférickom trojuholníku A, B, C je schématicky znázornený na obr. 1.21. Tenšími čiarami sú vykreslené normálové rezy, hrubšími čiarami geodetické čiary medzi vrcholmi sférického trojuholníka.

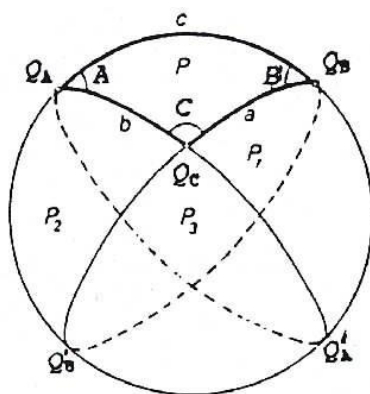
1.4 Referenčná guľa

Riešenie geodetických a kartografických úloh si môžeme podstatne zjednodušiť tým, že sa časť plochy referenčného elipsoidu nahradí guľou, tzv. referenčnou guľou. Najčastejšie sa nahradzuje plochou gule so stredným polomerom krivosti $R = \sqrt{MN}$. Napríklad pre bývalé územie Československa sa často používala guľa o polomere, ktorý sa rovná strednému polomeru krivosti pre

tohoto trojuholníka označme P . Z obrázku sú zrejme ďalšie tri sférické trojuholníky: $Q_A'Q_BQ_C$ s plochou P_1 , $Q_AQ_B'Q_C$ s plochou P_2 , $Q_B'Q_A'Q_C$ s plochou P_3 , ktoré sa s trojuholníkom $Q_AQ_BQ_C$ dopĺňajú na tri sférické dvojuholníky s uhlami A, B a C .

Plocha celej gule $P_G = 4pR^2$.

Plochy jednotlivých dvojuholníkov (pre uhly vyjadrené v gonoch) budú



Obr. 1.24. Sférický trojuholník

$$P_A = P + P_1 = \frac{4pR^2}{400} A^g,$$

$$P_B = P + P_2 = \frac{4pR^2}{400} B^g,$$

$$P_C = P + P_3 = \frac{4pR^2}{400} C^g.$$

Po spočítaní týchto rovníc dostaneme

$$2P + (P + P_1 + P_2 + P_3) = \frac{2pR^2}{200} (A + B + C). \quad (1.83)$$

Súčet plôch trojuholníkov v zátvorke na ľavej strane rovnice (1.83) dáva plochu pologule $2pR^2$ takže môžeme písať:

$$2P + 2pR^2 = \frac{2pR^2}{200} (A + B + C).$$

Po úprave dostaneme

$$P = \frac{pR^2}{200} (A + B + C - 200). \quad (1.84)$$

Výraz v zátvorke je sférický exces, takže ho môžeme vyjadriť:

$$e = \frac{200}{p} \frac{P}{R^2}.$$

Pretože $200/\pi = \rho$ (radián) napíšeme výsledný vzorec v tvare

$$e = r \frac{P}{R^2}, \quad (1.85)$$

ak dosadíme radián v „grádových sekundách“ $r^{ec} = 636620^{cc}$ platí rovnica (1.82).

1.4.2 Riešenie elipsoidických a sférických trojuholníkov

Pri bežných triangulačných prácach súvisiacich s riešením elipsoidických trojuholníkov ($s < 60$ km) považujeme tieto trojuholníky za sférické na referenčnej guli s polomerom rovným strednému polomeru krivosti $R = \sqrt{MN}$ pre strednú zemepisnú šírku $j = (j_{QA} + j_{QB} + j_{QC}) / 3$. Všeobecné vzorce sférickej trigonometrie nie sú z praktického hľadiska vhodné pre riešenie týchto trojuholníkov (strany sú vyjadrené v uhlovej miere a sú veľmi malé vzhľadom k polomeru gule; výpočty je potrebné vykonávať s veľkým počtom desatinných miest), preto sa sférické trojuholníky riešia zvláštnymi metódami: excesovou a adimentovou metódou.

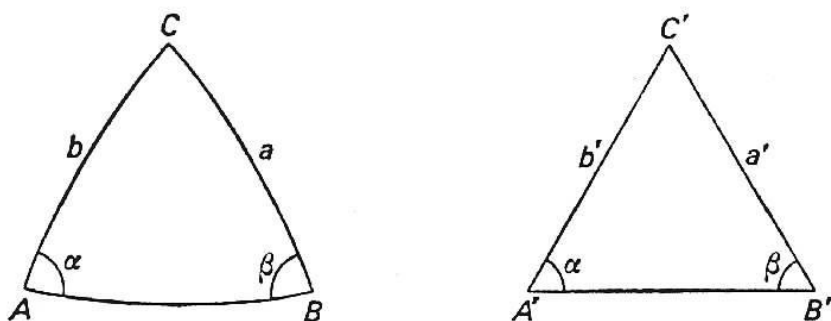
Excesová metóda je založená na Legendreovej vete: „Sférický trojuholník môžeme v geodézii riešiť ako rovinný s rovnakými stranami, ak zmenšíme každý jeho uhol o tretinu excesu“. Ak je napr. daná strana a sférického trojuholníka, obr. 1.14, vypočítame jeho strany b a c so sínusovej vety

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C', \quad (1.86)$$

$$\text{kde } A' = A - \frac{e}{3}, \quad B' = B - \frac{e}{3}, \quad C' = C - \frac{e}{3}. \quad (1.87)$$

Aditamentova (Soldnerova 1920) metóda

Pri tejto metóde má náhradný rovinný trojuholník dva uhly rovnaké ako sférický trojuholník (obr. 1.25).



Obr. 1.25 Sférický a rovinný trojuholník

Vo sférickom trojuholníku je súčet uhlov väčší ako 180° o sférický exces. Náhradný rovinný trojuholník má rovnaké uhly α , β ale má kratšie strany a' , b' . Podľa sférickej sínusovej vety na guli o polomere R platí

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \frac{b}{R}}. \quad (1.88)$$

V náhradnom rovinnom trojuholníku je sínusová veta

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a'}{b'}. \quad (1.89)$$

Rovnice (1.88) a (1.89) porovnáme a funkcie $\sin \frac{a}{R}$ a $\sin \frac{b}{R}$ rozvineme do radu podľa Mac Laurina. Rozvoj funkcie $\sin x$ má tvar $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$

Na vyjadrenie rozvoja funkcie sínus postačia prvé dva členy

$$\frac{a'}{b'} \approx \frac{\frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3}}{\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}} = \frac{a - \frac{a^3}{6R^2}}{b - \frac{b^3}{6R^2}}. \quad (1.90)$$

Z rovnice (1.90) vyplýva, že strany v náhradnom rovinnom trojuholníku majú hodnoty

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad \text{a} \quad b' = b - \frac{b^3}{6R^2}. \quad (1.91)$$

Druhé vetné členy v rovniciach (1.91) predstavujú lineárny aditament (prídavok).

Pri riešení sférického trojuholníka, ak máme danú stranu a a uhly A, B a potrebujeme vypočítať stranu b , od strany a sférického trojuholníka odpočítame hodnotu lineárneho aditamentu $\frac{a^3}{6R^2}$.

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2}. \quad (1.92)$$

Potom zo sínusovej vety môžeme vypočítať stranu b'

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Stranu b vypočítame tak, že k strane b' pripočítame príslušný lineárny aditament $b^3/6R^2$

$$b = b' + \frac{b^3}{6R^2}. \quad (1.93)$$

Hodnoty lineárneho aditamentu v S JTSK pre $R = 6\,380\,703,6105$ sú uvedené v tab. 1.1.

Lineárny aditament

Tab. 1.1

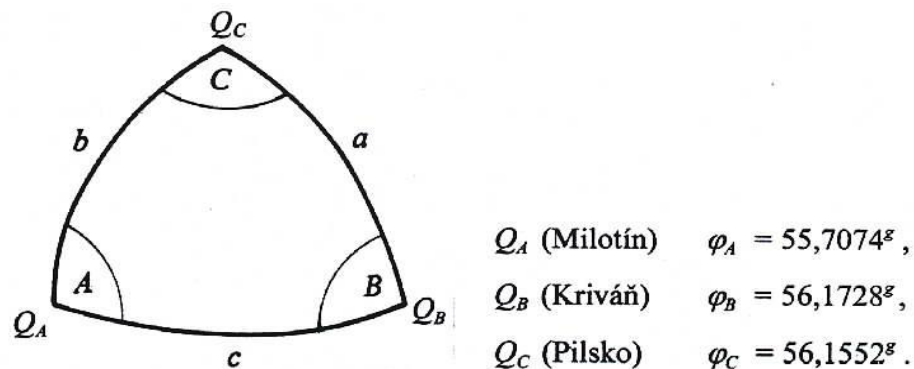
s	10 km	20 km	30 km	40 km	50 km	75 km	100 km
$S^3/6R^2$	4,1 mm	32,7 mm	110,5 mm	262,0 mm	511,7 mm	1727,0 mm	4093,7 mm

Ak dĺžky s sú kratšie ako 10 km a vyžadujeme presnosť výpočtov na cm, vtedy výpočty vo sférickom trojuholníku riešime ako úlohy v rovinnom trojuholníku.

Excesová metóda je vhodná na výpočet dĺžok strán v trojuholníkoch, keď je daná jedna strana a uhly. Aditamentová metóda je vhodná na výpočet dĺžok v trojuholníkových reťazcoch, keď bola daná východisková strana a keď ide o výpočet koncovej strany. Vtedy počítame len aditament východiskový a koncovej strany. Aditamenty ostatných strán reťazca nie je potrebné počítať.

Príklad 1:

Úlohou je určiť stredný polomer krivosti pre ťažisko elipsoidického trojuholníka (Besselov elipsoid). Dané sú geodetické šírky vrcholov trojuholníka



Meridiánový, priečny i stredný polomer krivosti určite výpočtom a kontrolu vykonajte určením stredného polomeru krivosti z tabuliek.

a) Výpočtom:

Parametre Besselovho elipsoidu sú: $a = 6\,377\,397,155$ m,

$$b = 6\,356\,078,963 \text{ m,}$$

$$e^2 = 0,006\,674\,372.$$

$$\text{Stredná geodetická šírka: } j_s = (j_A + j_B + j_C) / 3 = 56,0118^\circ.$$

Meridiánový polomer krivosti:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 j)^{3/2}} = 6\,372\,684 \text{ m,}$$

Priečny polomer krivosti:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 j}} = 6\,390\,074 \text{ m.}$$

$$\text{Stredný polomer krivosti: } R = \sqrt{MN} = 6\,381\,373 \text{ m.}$$

b) Z tabuliek:

Kontrolu výpočtu stredného polomeru krivosti sme vykonali pomocou Schreiberových tabuliek (J.Ryšavý: Vyšší geodesie). Pre prácu s týmito tabuľkami prevedieme j_s° z gónov na šesťdesiatinné delenie t.j. stupne a minúty $j_s^\circ = 50^\circ 24,64'$. (Góny na stupne prevedieme vynásobením $0,9 - 56,0118 \cdot 0,9 = 50,41062^\circ$, časť za desatinnou čiarkou prevedieme na minúty vynásobením $0,6 - 0,40162 \cdot 0,6 = 24,64'$).

$$\begin{array}{ll} \log R & \text{pre } 50^\circ 20' = 6,804\,91\,360 \\ & \text{pre } 4,64' = 53 \end{array}$$

$$\text{pre } 50^\circ 24,64' = 6,804\,91\,413$$

$$R = 6\,381\,373 \text{ m.}$$

Príklad 2:

Úlohou je vypočítať dĺžku strany a na Besselovom elipsoide excesovou metódou. Dané sú uhly $A = 67,72598^\circ$, $B = 54,59209^\circ$ a strana $c = 60\,079,63$ m. Ide o ten istý elipsoidický trojuholník, ako v príklade 1. Hodnoty geodetických širok preberieme.

Pre ťažisko elipsoidického trojuholníka vypočítame stredný polomer krivosti (preberieme ho z príkladu 1), vypočítame plochu trojuholníka a sférický exces pre referenčnú guľu. Opravíme merané uhly a nakoniec zo sínusovej vety vypočítame dĺžku a na Besselovom elipsoide.

Plochu P vypočítame ako v rovinnom trojuholníku:

$$P = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} = 1,2704 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

$$\text{Sférický exces: } e^{cc} = r^{cc} \frac{P}{R^2} = 19,862^{cc}, \quad (r^{cc} = 636\,620^{cc}).$$

Pri aplikácii excesovej metódy sa dĺžky ponechajú a uhly sa zmenšia o tretinu excesu:

$$A' = A - \frac{e}{3} = 67,72532^\circ, \quad B' = B - \frac{e}{3} = 54,59143^\circ.$$

Nakoniec dosadením do sínusovej vety (pre rovinný trojuholník) vypočítame dĺžku strany a na elipsoide:

$$a = c \frac{\sin B}{\sin A} = 55\,923,89 \text{ m}.$$

1.4.3 Riešenie základných geodetických úloh na guli

Základné (tiež hlavné) geodetické úlohy sú definované (pre guľu aj elipsoid) takto:

I. základná geodetická úloha:

Sú dané geodetické súradnice j_1, I_1 bodu P_1 , azimut a_{12} a dĺžka geodetickej čiary s_{12} na bod P_2 . Máme vypočítať geodetické súradnice j_2, I_2 a azimut a_{21} v bode P_2 (obr. 1.25).

II. základná geodetická úloha:

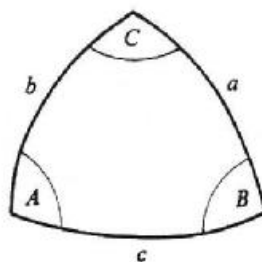
Sú dané geodetické súradnice j_1, I_1 a j_2, I_2 bodov P_1 a P_2 . Máme vypočítať dĺžku geodetickej krivky s_{12} a obidva azimuty a_{12} a a_{21} v daných koncových bodoch krivky.

Vo sférickom trojuholníku (obr. 1.25) platia vzťahy podľa nasledovných vzorov:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

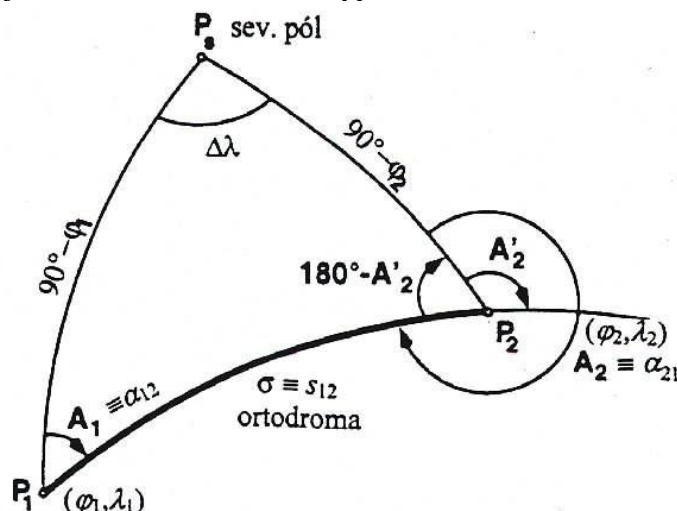
$$\sin C = \sin c \frac{\sin A}{\sin a}$$



Obr. 1.26. Sférický trojuholník

Riešenie: I. základnej geodetickej úlohy na guli v zemepisných súradniciach

Na guli s polomerom R je daný bod $P_1(j_1, I_1)$, dĺžka geodetickej krivky (ortodromy) S medzi bodmi P_1 a P_2 a jej azimut v bode P_1 . Máme vypočítať súradnice a azimut v bode $P_2(j_2, I_2, A_2)$.



Obr. 1.27. Základné geodetické úlohy na guli

Vo sférickom polárnom trojuholníku $P_1P_2P_s$ (obr. 1.26) platí kosínusová veta

$$\cos(90^\circ - j_2) = \cos(90^\circ - j_1) \cos \frac{S}{R} + \sin(90^\circ - j_1) \sin \frac{S}{R} \cos A_1$$

po úprave

$$\sin j_2 = \sin j_1 \cos \frac{S}{R} + \cos j_1 \sin \frac{S}{R} \cos A_1 \quad (1.94)$$

Ďalej je podľa sínusovej vety

$$\sin \Delta I = \sin \frac{S}{R} \frac{\sin A_1}{\sin(90^\circ - j_2)} = \sin \frac{S}{R} \frac{\sin A_1}{\cos j_2}, \quad (1.95)$$

$$\sin(180^\circ - A'_2) = \sin A'_2 = -\sin A_2 = \cos j_1 \frac{\sin A_1}{\cos j_2} = \cos j_1 \frac{\sin \Delta I}{\sin S / R} \quad (1.96)$$

Z rovnice (1.94) vypočítame j_2 , z rovnice (1.95) ΔI a ďalej $I_2 = I_1 + \Delta I$. Kvadranty uhlov ΔI a j_2 sa určia výpočtom z kosínusových viet vo sférickom trojuholníku.

Riešenie II. základné geodetické úlohy na guli v zemepisných súradniciach

Na guli s polomerom R sú dané zemepisné súradnice bodov $P_1(j_1, I_1)$ a $P_2(j_2, I_2)$. Máme vypočítať dĺžku oblúka geodetickej čiary (ortodromy) S_{12} medzi bodmi P_1 a P_2 a azimuty A_1, A_2 v týchto bodoch.

Vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platia Neperove analógie

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cotg \frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cotg \frac{C}{2}.$$

Všeobecne platné vzťahy goniometrických funkcií sú:

$$\cos(-a) = \cos a,$$

$$\sin(-a) = -\sin a,$$

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a,$$

$$\cotg(-a) = -\cotg a,$$

$$\operatorname{tg}(j+90^\circ) = -\cotg j,$$

$$\operatorname{tg}(a-90) = -\cotg a,$$

$$\cos(90-j) = \sin j.$$

Pre uhly $(A_1 + (180^\circ - A'_2))$ vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A_1 - A'_2 + 180}{2} &= \frac{\cos\left(\frac{90-j_2-(90-j_1)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{90-j_1+90-j_2}{2}\right)} \cotg \frac{\Delta I}{2}, \\ -\cotg \frac{A_1 - A'_2}{2} &= \frac{\cos \frac{j_1-j_2}{2}}{\sin \frac{j_1+j_2}{2}} \cdot \cotg \frac{\Delta I}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{A'_2 - A_1}{2} &= \frac{\sin \frac{j_1+j_2}{2}}{\cos \frac{j_2-j_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\Delta I}{2}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Pri odvodení rovnice (1.93) sme použili úpravy:

$$\begin{aligned} -\cotg \left(\frac{A_1 - A'_2}{2} \right) &= \cotg \left(\frac{A'_2 - A_1}{2} \right), \\ \cos \frac{(j_1-j_2)}{2} &= \cos \left(-\frac{j_2-j_1}{2} \right) = \cos \frac{j_2-j_1}{2}, \\ \cos \frac{(180-(j_1+j_2))}{2} &= \sin \frac{(j_1+j_2)}{2}. \end{aligned}$$

Pre uhly $(A_1 - (180^\circ - A'_2))$ vo sférickom trojuholníku (obr. 1.26) platí

$$\begin{aligned}
tg \frac{A_1 + A'_2 - 180^\circ}{2} &= \frac{\sin\left(\frac{90 - j_2 - (90 - j_1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{90 - j_2 + 90 - j_1}{2}\right)} \cot g \frac{\Delta I}{2}, \\
- \cot g \frac{A_1 + A'_2}{2} &= \frac{\sin \frac{j_1 - j_2}{2}}{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}} \cdot \cot g \frac{\Delta I}{2} = \frac{\sin\left(\frac{j_2 - j_1}{2}\right)}{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}} \cdot \cot g \frac{\Delta I}{2} \quad / \cdot -1 \\
tg \frac{A_1 + A'_2}{2} &= \frac{\cos \frac{j_1 + j_2}{2}}{\sin \frac{j_2 - j_1}{2}} tg \frac{\Delta I}{2}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Pri odvodení rovnice 1.94 sme použili úpravy:

$$\sin\left(-\frac{j_2 - j_1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{j_2 - j_1}{2}\right).$$

Ľavé strany rovníc (1.97) a (1.98) vypočítame z funkcií arctg pravých strán rovníc. Súčtom a rozdielom upravených rovníc 1.97 a 1.98 vypočítame neznáme uhly A_1 a A_2 .

$$\begin{aligned}
A'_2 &= \frac{A'_2 - A_1}{2} + \frac{A'_2 + A_1}{2}, \\
A_1 &= \frac{A'_2 + A_1}{2} - \frac{A'_2 - A_1}{2} \text{ a} \\
A_2 &= A'_2 \pm 180^\circ.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Podľa sínusovej vety je ďalej

$$\sin \frac{S}{R} = \sin \Delta I \frac{\sin(90^\circ - j_1)}{\sin(180^\circ - A'_2)} = \sin \Delta I \frac{\sin(90^\circ - j_2)}{\sin A_1}.$$

Po úprave, keď sme použili $(\sin(180^\circ - A'_2)) = \sin A'_2$ dostaneme

$$\sin \frac{S}{R} = \sin \Delta I \frac{\cos j_1}{\sin A'_2} = \sin \Delta I \frac{\cos j_2}{\sin A_1}. \tag{1.100}$$

Z rovníc 1.100 vypočítame S/R v uhlovej miere; dĺžka oblúka (strany) v dĺžkovej miere je

$$S = \frac{S}{R} \frac{R}{r''}. \tag{1.101}$$

Kvadranty azimutov A_1 , A'_2 a kladný alebo záporný zmysel dĺžky S sa zvyčajne určuje na mape, na globe alebo z vhodného obrázka.